GALBRAITH AND HAUGHTON'S SCIENTIFIC MANUALS.

MATHEMATICAL SERIES.

MANUAL OF

PLANE TRIGONOMETRY

BY

THE REV. JOSEPH A. GALBRAITH, M. A.

FELLOW OF TRINITY COLLEGE

AND ERASMUS SMITH'S PROFESSOR OF NATURAL AND EXPERIMENTAL PHILOSOPHY IN THE UNIVERSITY OF DUBLIN

TRANSLATED INTO URDU,

BY

MUNSHI MAHAMMED ZAKA UL LAH,

HEAD MASTER, NORMAL SCHOOL, DEHLI.

IN FURTHERANCE OF THE OBJECTS OF THE SCIENTIFIC SOCIETIES OF ALLYGURH AND SUBA BEHAR.

گال بریتھہ اور ھاٹن صاحب کے رسالہ ھای علم ریاضی میں سے

رسالہ علم مثلث مستوی

مولفہ

جناب ریورنڈ جوزف اے گال بریتھہ صاحب. ایم اے.

فلو آف ترینیٹی کالج و پروفسر نیچرل اور اکسپیریمنٹل فلاسفی

یونیورسٹی مقام ڈبلن

جسکو

منشی محمد ذکاءاللہ صاحب ہیڈ ماسٹر نارمل اسکول دہلی

نے

بتائید مقاصد

سینٹیفک سوسیٹی علیگڈہ و سینٹیفک سوسیٹی صوبہ بہار

اردو میں ترجمہ کیا

بمقام دہلی مطبع مرتضوی میں باہتمام حاجی محمد عزیزالدین

کے چھپا

GALBRAITH AND HAUGHTON'S SCIENTIFIC MANUALS.

MATHEMATICAL SERIES.

MANUAL OF

PLANE TRIGONOMETRY

BY

THE REV. JOSEPH A. GALBRAITH, M. A.

FELLOW OF TRINITY COLLEGE,

AND ERASMUS SMITH'S PROFESSOR OF NATURAL AND EXPERIMENTAL PHILOSOPHY IN THE UNIVERSITY OF DUBLIN.

TRANSLATED INTO URDU,

BY

MUNSHI MAHAMMED ZAKA-ULLAH,

HEAD MASTER, NORMAL SCHOOL, DELHI,

IN FURTHERANCE OF THE OBJECTS OF THE SCIENTIFIC SOCIETIES OF ALLYGURH AND SUBA BEHAR

گال بریتھہ اور ہاٹن صاحب کے رسالہ ہای علم ریاضی میں سے

رسالہ علم مثلث مستوی

مؤلفہ

ریورنڈ جوزف اے گال بریتھہ صاحب ایم اے

فلو اف ترینیٹی کالج و پروفسر نیچرل اور اکسپریمنٹل فلاسفی

یونیورسٹی مقام ڈبلن

جسکو

منشی محمد ذکاءاللہ صاحب ہیڈ ماسٹر نارمل اسکول دہلی

نے

بتائید مقاصد

سینٹیفک سوسایٹی علیگڈہ و سینٹیفک سوسیٹی صوبہ بہار

اوردو میں ترجمہ کیا

اور

بمقام دہلی مطبع مرتضوی میں باہتمام حاجی محمد عزیزالدین

کے مطبوع ہوا

سنہ ۱۸۷۱ ع ۵

بسم اللہ الرحمن الرحیم

ایرلنڈ مین ڈبلن کی یونیورسٹی کی سارے امتحان گلبرتھہ اور ہاٹن کے سلسلہ کتب ریاضیہ مین ہوتے غرض یہ سلسلہ ایرلنڈ مین سب کتب ریاضیہ پر سبقت لے گیا ہی اوس سلسلہ مین سے یہ علم مثلث مستوی کا رسالہ ہی - یہ رسالہ اس ملک کے طلبہ کے لئے نہایت مناسب ہے اونکو بہت آسانی سی علم مثلث اچھے آسکتا ہی

فہرست مضامین

باب چہارم
قوانین مثلثی

باب پنجم

باب ششم
مثلثات غیر قائم الزاویہ

باب ہفتم



علم مثلث

تمہید

کبھی کسی زمانہ مین علوم ریاضیہ کی جس فرع مین مثلثون کے حل کرنے کے قاعدے بیان ہوتے تھے اونکو در اصل طرگنومٹری یعنے علم مثلث کہتے تھے مگر آجکل کے زمانہ مین علم مثلث کے معنی بہت وسعت پکڑ گئے ہین اوسمین تمام نظریات اور قوانین جیسے کہ ارتباط زاویون کے اور خاص مقادیر کے بیان ہوتے ہین داخل ہین۔ ان خاص مقادیر کو جسکی نسبت کہ زاویون کا ارتباط بیان ہوتا ہے علم مثلث کی جملی کہتے ہین اور وہ زاویون پر موقوف ہوتے ہین ۔

علم ہندسہ کی استعانت سے جب تین معطیات ایسے معلوم ہوتے ہین کہ اونمین ایک دوسرے پر موقوف نہین ہوتا تو اونکے موافق مثلث ہم بنا لیا کرتے ہین اسیطرح انہین معطیات کو اعداد مین بیان کرکے ہم بذریعہ علم مثلث کے مثلث کے اضلاع اور زاویون کا حساب لگا لیتے ہین ۔

مثلث سطح مستوی اور سطح کروی پر ہم بنا سکتے ہین اسیوجہ سے یہہ دو فرع مین منقسم ہو گیا ہے ایک فرع کا نام علم مثلث مستوی ہے اور دوسری فرع کا نام علم مثلث کروی ہے اس رسالہ مین ہم علم مثلث مستوی کے قوانین اور قاعدے بیان کرین گے ۔

باب اول

۱ تعریف زاویہ کی ۲ پیمانہ واحد زاویہ کا ۳ زاویہ کا قیاس قوسی

۴ محیط اور قطر کی نسبت ۵ زاویہ قائمہ کا قیاس قوسی ۶ دائرہ کا [illegible] حصون مین تقسیم ہونا

زاویون کے پیمانے

۱ **تعریف زاویہ کی** اقلیدس مین تعریف زاویہ کی یہہ لکھی ہے کہ جب دو خط مستقیم ایک نقطہ پر ملین اور ملکر ایک خط نہو جائین تو جو میلان ایک خط مستقیم کو دوسرے کیطرف ہوتا ہے اوسی زاویہ کہتے ہین

اب زاویہ کی مقدار کو اعداد مین بیان کرنیکے لئے ضرور ہے کہ کسی خاص زاویہ کو پیمانہ واحد مقرر کرین تاکہ اوس سے اور زاویونکا اندازہ بتلا سکین

۲ **پیمانہ واحد زاویہ کا** پیمانہ واحد جس سے اور سب زاویون کا اندازہ کر سکین اور بیان سکین اوسکی تعریف یہہ ہے *



حد زاویہ کا پیمانہ واحد وہ زاویہ مرکزی دائرہ کا ہے جسکے سامنے کی قوس برابر نصف قطر کے ہو *

س کے مرکز اور کسی نصف قطر $\overline{\text{س ز}}$ پر دائرہ کھینچو اور فرض کرو کہ قوس $\overline{\text{ز د}}$ طول مین برابر نصف قطر کے بنائی جائے اور نقطہ د اور مرکز مین خط ملایا جائے

زاویہ $\overline{\text{ز س د}}$ = زاویہ کے پیمانہ واحد

۳ **مقیاس قوسی کا زاویہ** ہر ایک زاویہ مثلاً ا س ب اعداد مین اس پیمانہ واحد کے موافق تعبیر ہو سکتا ہے

فرض کرو کہ ق وہ عدد ہے جو زاویہ کی قیمت کو بیان کرتا ہے اور اونکے سامنے کی قوس ا ب کا طول ق ہے اور نق نصف قطر دائرہ کا ہے تو بحکم (۳۳ ش ہم) کے

$\overline{\text{ا س ب}}$: $\overline{\text{ا س د}}$ :: قوس $\overline{\text{ا ب}}$: قوس $\overline{\text{ا د}}$

لیکن زاویہ ا س د پیمانہ واحد ہے اور ا د فرضاً برابر نصف قطر کے ہے اس واسطے

و : ۱ :: ق : نق

اور اسیواسطے

و = ق / نق

یہہ جملہ جو زاویہ کی قیمت کو بیان کرتا ہے ہمارے [illegible]

[illegible]

تعبیر کرتا ہے ؎

مساوات (۱) مین تین مقادیر ا د ا د نق آپسمین مربوط ہوئے ہین اوس سے معلوم ہوتا ہے کہ جب ان مین سے دو معلوم ہون تو تیسری مقدار معلوم ہو سکتی ہے

امثلہ مشق ۱

(۱) اگر نصف قطر دائرہ کا ۳۵ فٹ ہو تو اوس زاویہ کی مقیاس قوسی کا حساب کرو جسکے محاذی قوس ۶ فیٹ طول مین ہو ؎

(۲) اگر نصف قطر ۲ فیٹ ۷ انچ ہو اور قوس ۵ انچ ہو تو زاویہ مرکز پر دریافت کرو

(۳) اگر نصف قطر ۹ فیٹ ہو اور زاویہ مرکزی = ۴۳۷۶ء تو اوسکے سامنے کی قوس دریافت کرو

(۴) اگر نصف قطر ۱۰ فیٹ ۹ انچ ہو اور زاویہ مرکزی ۰۰۱۲۴۷ء تو قوس کا حساب بتاؤ

(۵) اگر زاویہ مرکزی مساوی ۱ء۲۵ ہو اور اوسکے سامنے کی قوس ۱۶ فیٹ ہے نصف قطر کا حساب بتاؤ

(۶) اگر زاویہ مرکز پر ۰۰۰۱۵۷ء ہو اور اوسکے سامنے قوس ۲ انچ ہو نصف قطر دریافت کرو ؎

(۴) قطر اور محیط کی نسبت محیط اور قطر کی نسبت تقریبی کی نسبت مہندسین نے یہہ دریافت

محیط : قطر :: ۳٫۱۴۱۵۹ : ۱

عدد ۳٫۱۴۱۵۹ کی اکثر ضرورت قوانین علم مثلث مین پڑیگی اسلئے آسانی کے واسطے اس عدد کو ہمیشہ حرف کہ سے تعبیر کرتے ہین اب آخر مثالات مین عدد مذکور کی جگہ کہ اور قطر کی جگہ ۲ نق رکھنے سے یہہ حاصل ہوتا ہے کہ محیط = ۲ کہ نق

(۵) زاویہ قائمہ کا مقیاس قوسی - مساوات (۲) سے زاویہ قائمہ کا مقیاس قوسی دریافت کرسکتے ہین زاویہ قائمہ کے سامنے جو قوس ہوتی ہے وہ دائرہ کی ربع محیط کی برابر ہے یعنے ½ کہ نق کے اسکو نق پر تقسیم کرنے سے مساوات (۱) سے یہہ حاصل ہوگا کہ

مقیاس قوسی زاویہ قائمہ کا = ½ کہ

(۶) دائرہ کی تقسیم ساٹھہ ساٹھہ کی پیمانہ واحد زاویہ کا ایا بڑا ہے کہ اوسکا اعمال مین استعمال

خالی تکلف سے ہنین اور سواء ازین چار قائمے او سکے اضعاف نہین یعنے پیمانہ واحد کوئی پورا حصہ چار قائمونکا ہنین اسلئے علم ہیئت کے شاہد ہے اور زمین کی مساحت مین ایک اور طریقہ زاویہ کی عددی قیمت بیان کرنے کا اختیار کیا گیا ہے

محیط دائرہ کا ۳۶۰ حصو مین تقسیم کیا ہے اور ایک حصہ کی قوس کے سامنے جو زاویہ مرکز پر واقع ہوتا ہے اوسکا نام درجہ رکھا ہے اور درجہ کو ۶۰ برابر حصو مین تقسیم کرکے ایک حصہ نام دقیقہ رکھا ہے اور پہر اس دقیقہ کو ساٹھہ برابر حصو مین تقسیم کرکے ایک حصہ کا نام ثانیہ رکھا ہے ۔ درجہ دقیقہ ثانیہ کے واسطے یہہ علامتین ° ′ ″ مقرر کی ہین

مثلاً ۴۳° ۲۵′ ۱۸″ سے ۴۳ درجے ۲۵ دقیقے ۱۸ ثانیئے مراد ہین

اب جو زاویہ کہ درجہ دقیقہ ثانیہ مین بیان کیا جائے اوسکی تحویل ضرور ہے کہ مقیاس قوسی کی طرف اور جو زاویہ موافق مقیاس قوسی کے بیان کیا جائے اوسکے درجہ دقیقہ ثانیہ کیطرف تحویل کیجائے اس مطلب کے واسطے اس امر کا دریافت کرنا پر ضرور ہے کہ زاویہ کے پیمانہ واحد مین کتنے ثانیے ہوتے ہین

زاویہ کے پیمانہ واحد کے ثانیون : چار قائمونکے ثانیون سے :: قوس ا ر د : محیط

یعنے زاویہ کے پیمانہ واحد کے ثانیون : ۳۶۰ × ۶۰ × ۶۰ :: ن ق : ۲ کہ ن ق

اور چونکہ کہ = ۳.۱۴۱۵۹ اسلئے

زاویہ کے پیمانہ واحد کی تعداد ثانیون کی = ۲۰۶۲۶۵ گ

اگر زاویہ کے سامنے کی قوس کا طول ط ہو اور اوسمین تعداد ثانیونکی گ ہو تو

گ : ۲۰۶۲۶۵ گ :: ط : ا ر د

اور چونکہ ا ر د = ن ق

اس سے یہہ استخراج ہوتا ہے کہ گ = ۲۰۶۲۶۵ گ × ط/ن ق (س)

یعنی تعداد ثانیون کی = ۲۰۶۲۶۵ × مقیاس قوسی

مساوات (۳) مین نصف قطر اور زاویہ مرکزی کی تعداد ثانیونکی اور طول قوس کا جو اوسکے سامنے ہو آپس مین ربط دیئے گئے ہین ان تین مین سے جب دو معلوم ہونگے تو تیسرا معلوم معلوم ہوجائیگا

امثلہ مشق ۲

(۱) ۶۰° کے زاویہ کی تحویل مقیاس قوسی کیطرف کرو

(۲) ۹° کے زاویہ کی تحویل مقیاس قوسی کی طرف کرو

(۳) جس زاویہ کا مقیاس قوسی ۳/۴ ہو اوسمین درجے یا دقیقے ثانیے دریافت کرو

(۴) جس زاویہ کا مقیاس قوسی ۲۵۶ء۰ ہو اوسمین تعداد درجے دقیقے ثانیون کی بتلاؤ

(۵) زاویہ کے پیمانہ واحد مین تعداد درجے دقیقے ثانیون کی دریافت کرو

(۶) ۵° کا مقیاس قوسی کیا ہے

(۷) ایک دائرہ کا نصف قطر ۱۰۰ فیٹ ہے اوسمین ۹ فیٹ کی قوس کے سامنے جو زاویہ ہو اوسمین تعداد درجے دقیقے ثانیون کی دریافت کرو

(۸) ایک شخص کرہ کے مرکز پر کہڑا ہوا دیکھتا ہے کہ کرہ کے سطح پر ایک خط ۶ فیٹ کا ہے اور اوسکے سامنے زاویہ ۳′ ۲۸″ کا ہے اوس کرہ کا نصف قطر دریافت کرو

(۹) زمین کا قطر ۷۹۲۶ میل کا ہے اور اوسکا فاصلہ چاند سے ۲۳۷۶۳۸ میل ہے تو بتاؤ زمین کے قطر کے سامنے چاند مین کتنا بڑا زاویہ ہوگا

(۱۰) زمین پر زاویہ قمر کے قطر کے سامنے ۳۱′ ۸″ ہے قمر کا قطر بتاؤ

(۱۱) یہ امر تحقیق کیا گیا ہے کہ قطر زمین کے محاذی مرکز آفتاب پر زاویہ ۱۷ء۲″ ہے آفتاب کا فاصلہ زمین سے دریافت کرو

(۱۲) زمین پر آفتاب کا قطر زاویہ ۳۲′ ۳″ بناتا ہے تو اوسکا قطر دریافت کرو

باب دوم

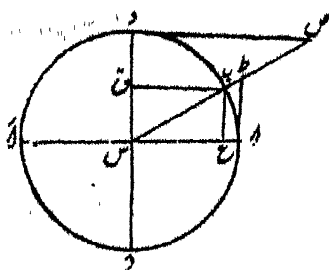
علم مثلثی جملے

علم مثلثی جملے

(۱) قوس کے مثلثی جملے (۲) ارتباطات باہمی مثلثی جملون کے (۳) اتفاق جمہور علامت مثبت اور منفی کے باب مین (۴) مثلثی جملون کی قیمتون کی تحقیقات کرنی (۵) زاویہ کے مثلثی جملے (۶) منفی زاویے (۷) ایک زاویہ کے مثلثی جملون کے ارتباطات (۸) جملہاے متساویہ (۹) زاویون کی تمامی یا متمم (۱۰) زاویون کا تکملہ یا مکمل (۱۱) جداول مثلثی

(۱) **قوس کے مثلثی جملے** بعض خاص خطوط قوس پر موقوف ہوتے ہین اونکا نام قوس کے علم مثلثی جملے رکہا گیا ہے اور اون کی تعریف یہہ کی گئی ہے *

س کو مرکز اور کسی خط س ا کو نصف قطر فرض کرکے



ایک دائرہ کہینچو اور نقطہ س سے دو قطر ا اَ اور د دَ متقاطع علی القوائم کہینچو اور ا ب کوئی قوس لو اور فرض کرو کہ وہ اوپر کیطرف س ا سے پیمائش کیجاتی ہے اور نقطہ ب انجام قوس سے ب ع عمود س ا پر نکالو اور ب ق عمود س د پر کہینچو اور نقاط ا و د سے خطوط مستقیم ا ط اور د ص دائرہ کو مس کرتے ہوئے کہینچو اور نصف قطر س ب کو بڑہاؤ کہ وہ اون سے نقاط ط اور ص پر ملین *

حدود یعنی تعریفات

قوس کے ایک انجام سے کوئی قطر کہینچا جائے اور اوسپر قوس کے دوسرے انجام سے عمود نکالا جائے تو اس عمود کو جیب اس قوس کی کہتے ہیں

جیب قوس ا ب کی خط ب ع ہے

جیب التمام یا جیب المتمم قوس کی وہ عمود ہے جو قوس کے انجام سے اوس قطر پر نکالا جائے کہ اول قطر سے دائرہ بناتا ہے *

پس ب ق = س ع

علم مثلث جملے

مماس قوس کا وہ خط مستقیم ہے جو دائرہ کو قوس کے آغاز پر مس کرے اور اُس نصف قطر ممدودہ پر ختم ہو جو
قوس کے انجام مین گذرتا ہے ٭

قوس اب کا مماس خط ا ط ہے ٭

مماس التمام یا مماس المتمم قوس کا وہ خط ہے کہ دائرہ کو ربعہ اول کے آغاز پر مس کرے اور نصف
قطر ممدودہ پر جو قوس کے انجام مین گزرتا ہے مختتم ہو

قوس اب کا مماس التمام خط د ص ہے ٭

قاطع القوس قوس کا وہ خط مستقیم ہے کہ مرکز دائرہ سے قوس کے انجام مین ملکر بڑہایا جائے
اور مماس پر ختم ہوجائے ٭

قوس اب کا قاطع القوس س ط ہے

قاطع التمام یا قاطع المتمم قوس کا وہ خط مستقیم ہے کہ مرکز دائرہ سے قوس کے انجام مین ملا کر بڑہایا
جائے اور مماس پر ختم ہو

قوس اب کا قاطع یا قاطع المتمم س ص ہے

جیب معکوس قوس کی وہ خط مستقیم ہے کہ قوس کی ابتدا اور جیب کی نتہا کے درمیان واقع ہو

قوس اب کی جیب معکوس ا ع ہے

جیب معکوس التمام قوس کی وہ خط مستقیم ہے کہ ربعہ اول کے انجام اور پائین جیب التمام کے درمیان واقع ہو

قوس اب کی جیب معکوس التمام د ق ہے

یہہ امر شکل سے ظاہر ہے کہ خطوط ب ق و د ص و س ص و د ق تو جیب اور
مماس اور قاطع القوس اور جیب معکوس قوس د ب یا ہین اور قوس د ب تمامی یا متمم اب کی ہے
یہی وجہ تسمیہ جیب التمام اور مماس التمام اور قاطع التمام اور جیب معکوس التمام قوس اب کے
ہوتی ہے کہ وہ زاویہ کی تمامی یا متمم کی جیب اور مماس وغیرہ ہین چونکہ س ع = ب ق
تو قوس اب کی جیب التمام کی یہہ تعریف ہوسکتی ہے کہ وہ خط مستقیم ہے کہ مرکز اور پائین جیب کے

درمیان واقع ہوا اختصاراً جیب کا جب اور جیب التمام کا جم اور مماس کا مس اور مماس التمام کا مم اور قاطع الزاویہ کا قط اور قاطع التمام کا قم اور جیب معکوس کا جع اور جیب معکوس التمام کا جعم لکھا کرتے ہیں ۔

(۲) قوس کے مثلثی جملوں کا ارتباط چونکہ زاویئے ب ع س اور س د ص قائمہ ہیں تو بحکم (۴۷ ش ۱م) کے

س ب² = ب ع² + س ع²

س ط² = س ا² + ا ط²

س ص² = س ذ² + د س²

اگر دائرہ کے نصف قطر کو نق سے تعبیر کریں تو

نق² = جیب² قوس + جیب التمام² قوس

قاطع² قوس = نق² + مماس² قوس

قاطع تمام² قوس = نق² + مماس تمام² قوس

چونکہ مثلث س ب ع اور ص س د متساوی الزوایا ہیں تو بحکم (۴ ش ۶م) کے یہ تناسب حاصل ہونگے ۔

مس قوس : نق :: جیب قوس : جم قوس

مم قوس : نق :: جم قوس : جیب قوس

قط قوس : نق :: نق : جم قوس

مم قوس : نق :: نق : مس قوس

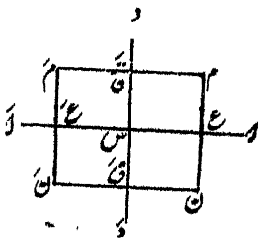
قم قوس : نق :: نق : جیب قوس

چونکہ ا ع = س ا − س ع اور د ق = د س − ب ع

تو جع قوس = نق − جم قوس

جعم قوس = نق − جیب قوس

(۳) **علامت مثبت اور منفی کی بابت بین الاتفاق جمہور** یہہ مثلثی جملونکی تعریفات جامع اور مانع ہین اسلیئے وہ ہر مقدار کی قوس کے اندر مستعمل ہو سکتے ہین پس اگر کوئی قوس بعہ دائرہ سے بڑی ہو تو بعض خطوط جنکی تعریف اوپر کی گئی ہے قطر عمودی دد کی بائین طرف واقع ہونگے اور بعض قطر افقی اا کے ماتحت اب ان مختلف مقامات کے تعین کرنیکے واسطے سب مہندسین نے اتفاق کرکے علامت مثبت اور منفی کی بابت ایسی بات مقرر کی ہے جس سے مقام اور مقدار خطونکی نہایت آسانی سے تعبیر ہو سکے



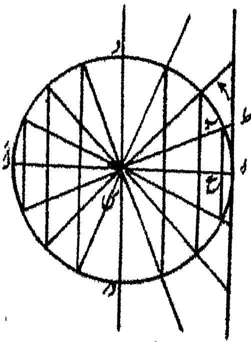
فرض کرو کہ دو خطوط مستقیم اا اور دد نقطہ س پر تقاطع کرتے ہین اور نقطہ س کو اصل مبدا مقرر کرین جس سے تمام خطوط ناپے جائین جو خطوط اا پر س کے دائین پیمائش کرین انہین مثبت یعنے + کہتے ہین اور جو خطوط س کے بائین طرف پیمائش کرین اونہین منفی یعنی – کہتے ہین ہر ایک خط جو دد پر س سے اوپر پیمائش کیا جائے اوسے مثبت یعنے + کہتے ہین اور ہر ایک خط جو دد پر س سے نیچے پیمائش کیا جائے اوسے منفی یعنے – کہتے ہین

پس اگر م سے اا اور دد کے متوازی خط کہیچین تو س ع مثبت ہے کیونکہ وہ س کے دائین طرف واقع ہوتا ہے اور م ع مثبت ہے اسلئے کہ وہ اپنے مساوی لہ س ق سی ناپا جاتا ہے اور س ق اوپر س کے واقع ہے اور بموافق اسی اصول کے س عَ اور ن عَ دونو – ہین م عَ + ہے اور نَ عَ – ہے

(۴) **مثلثی جملون کی قیمتون کی تحقیقات** قوس کی مختلف جملونکی قیمتونکی تحقیقات شکل ذیل مین کرتے ہین اسمین نقطہ دائرہ کے گرد ہر کی سمت مین پہرتا ہی یہ حسابات بہلے معلوم

جیب

(جس سمت مین حرکت ہوتی ہو اوسمین یہہ نشان تیر کی بہال کا کرتے ہین اور اوسکا سر سمت حرکت بتاتا ہی) ہم



اول اور دوسرے ربعہ مین جیب مثبت ہے اور اسکی مقدار ۰ سے لو تک اور لو سے ۰ تک بدلتی رہتی ہے

تیسرے چوتھے ربعہ مین جیب منفی ہے اور مقدار مین ۰ سے - لو تک اور - لو سے تک بدلتی ہے

جیب التمام

پہلے اور چوتھے ربعہ مین جیب التمام مثبت ہے اور مقدار مین لو سے ۰ تک اور ۰ سے لو تک بدلتی رہتی ہے - دوسرے تیسرے ربعہ مین جیب التمام منفی اور ۰ سے - لو تک اور - لو سے ۰ تک بدلتی رہتی ہے ؁

مماس

اول اور سوم ربعہ مین مماس مثبت ہوتا ہے اور مقدار مین ۰ اور لا انتہا کے درمیان بدلتا ہے اور چوتھے ربعہ مین مماس منفی ہوتا ہے اور مقدار مین منفی لا انتہا سے اور ۰ کے درمیان بدلتا رہتا ہے

یہہ اختلافات علامات کے نقشہ ذیل کے خلیون مین لکھے جاتے ہین ۔

نقشۂ اول

	دائرہ کی ربعات			
	اول	دوم	سوم	چہارم
جیب	+	+	-	-
جیب التمام	+	-	-	+
مماس	+	-	+	-

فرض کرو کہ ربعہ قوس کا طول ق سے تعبیر ہوتا ہے

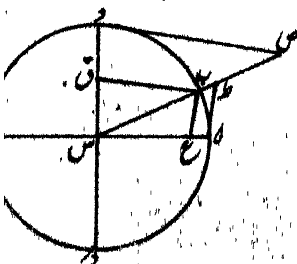
نقشۂ دوم

	۰	ق	۲ ق	۳ ق
جیب	۰	نق	۰	− نق
جیب التمام	نق	۰	− نق	۰
مماس	:	∞	۰	− ∞

(۵) **ایک زاویہ کے مثلثی جملے** اون خطوط کے موافق جو قوس کے جملی ہوتے ہین خاص نسبتین ہوتی ہین اونکو اوس زاویہ کے کہ قوس کے محاذی ہون علم مثلثی جملے کہتے ہین اور اونکی تعریف اکثر اسطرح ہوا کرتی ہے ؛

تعریف دائرہ کے مرکز پر جو زاویہ ہو اوسکی جیب اور جیب التمام اور مماس وغیرہما وہ نسبتین کہلاتی ہین جو اوس زاویہ کے سامنے کے قوس کے جیب اور جیب التمام وغیرہما نصف قطر دائرہ سے نسبت رکھتے ہین جیسے کہ شکل ذیل مین مذکور ہین

بع / نق جیب زاویہ د س ب کی
سع / نق جیب التمام ״
اط / نق مماس ״
سط / نق قاطع الزاویہ ״
دص / نق مماس التمام ״
سص / نق قاطع التمام ״
اع / نق جیب معکوس ״
دق / نق جیب معکوس ״



اسواسطے اگر زاویہ د س ب کو د سے تعبیر کرین

جب ا = جب قوس / ل

جم ا = جم قوس / ل

مس ا = مس قوس / ل

قط ا = قط قوس / ل

قم ا = قم قوس / ل

بج ا = بج قوس / ل

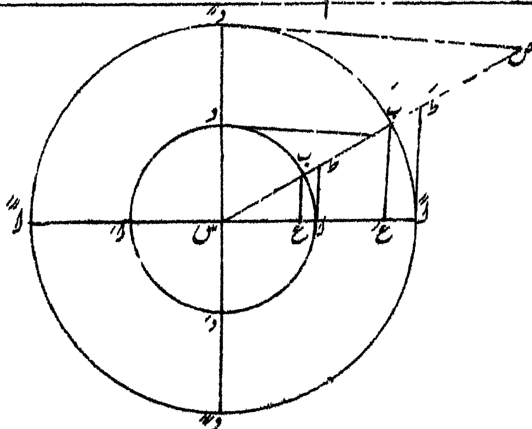
جم ا = جم قوس / ل

زاویہ اور اوسکے سامنے کی قوس کے درمیان جو ربط ہے وہ یہہ ہے

ا = قوس / ل

بعینہ ایسی ہی کیفیت ارتباطات مذکور کی ہے

زاویۂ معلوم کے سامنے جو قوس ہو اوسکے مثلثی جملے نصف قطر کی مقدار پر موقوف ہوتے ہین مگر برخلاف اسکے زاویہ کے مثلثی جملے کچھہ تعلق نصف قطر سے ہنین رکھتے اور وہ اسکی مقدار پر موقوف ہنین ہوتی وجہ اسکی یہہ ہے کہ اگر دائرہ نصف قطر کلاں جس ا پر کھینچیں تو خطوط بَ عَ اور سَ عَ اور ﻻَ ﻃَ وغیرہما جملے مثلثی قوس ﻻَ بَ کے بڑے بہ نسبت قوس ﻻ ب کے جملون کے ہین مگر ان خطون کی نسبتین نصف قطر سے بڑے دائرہ مین وہی ہین جو اونکے متناظر خطوط کی نسبت نصف قطر سے دائرہ خورد مین ہین اس سے ظاہر ہوتا ہے کہ زاویہ کے مثلثی جملے نصف قطر سے بالکل بے تعلق ہین اور اوس کی مقدار پر موقوف ہنین *



مثلاً مثلث س ع ب اور س ب ع متساوی الزوایا ہین اسواسطے

$$\text{حس ا} = \frac{\text{ب ع}}{\text{ب س}} = \frac{\text{ب ع}}{\text{س ب}}$$

$$\text{حم ا} = \frac{\text{س ع}}{\text{س ب}} = \frac{\text{س ع}}{\text{س ب}}$$

ان مساواتون سے اور حب اور حس التمام زاویہ کے تعریفات سے یہہ شکل مرتب ہوتی ہے

پہلی شکل

مثلث قائم الزاویہ مین وتر کے کسی متصل زاویہ کا مقابل کا ضلع تقسیم کیا گیا وتر پر برابر ہوتا ہے اوس زاویہ کی جیب کے اور اوسکی متصل کا ضلع تقسیم کیا گیا وتر پر برابر ہوتا ہے اوس زاویہ کے جیب التمام کے ۔ اس سے پہلے فصل اخیر مین جو ہم نے جدول لکھی اوس مین ہر جملے کو ق پر تقسیم کرنے سے یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

	۰	۹۰ یا ق/۲	۱۸۰ یا ق	۲۷۰ یا ۳ق/۲
جیب	۰	۱	۰	۱−
جیب التمام	۱	۰	۱−	۰
مماس	۰	∞	۰	−∞

(۶) منفی زاویئے ۔ ہم نے جو تعریفین مثلثی جملون کی لکھی ہین اوسین زاویہ

مثبت نصف قطر س ا سے تیر کی سمت میں پیمائش کیا ہے پس جیسا یسے زاویوں کو مثبت خیال کرتے ہیں تو ضرور ہے کہ جو زاویئے کہ تیر کے نیچے کیطرف ناپے جائیں اون کو منفی کہیں +

شکل دوم

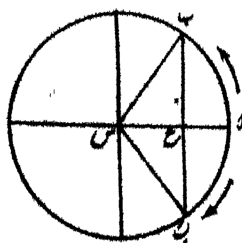
دعوی زاویہ کی جیب زاویہ کی علامت بدلنے سے بدل جاتی ہے اور جیب التمام وہی رہتے ہیں

بیان دعوی فرض کرو کہ زاویہ ا ہو تو

حب (– ا) = – حب ا

حم (– ا) = حم ا

عمل شکل مرکز س اور کسی طول س ا کو نصف قطر مقرر کر کے دائرہ کھینچو اور زاویہ ا س ب = ا اور ا س بَ = – ا کے بناؤ اور ملاؤ ب بَ



ثبوت بحکم (۲ س ام) کے ظاہر ہے کہ مثلث س ع ب اور س ع بَ بسطح سے برابر ہیں کیونکہ س ع والے زاویے ب بَ پر بناتا ہے بموجب پہلی شکل کے

حب (– ا) = بَ ع / س ع اور حب ا = ب ع / س ع

لیکن بَ ع اور ب ع مقداریں متساوی ہیں اور علامت میں س ب مخالف ہیں (موافق فصل ۳ کی) اسواسطے

حب (– ا) = – حب ا

اور پھر س ع مثلث س س ع اور ث س ع میں مشترک ہے اسواسطے

حم (– ا) = حم ا یہی ثابت کرنا تھا

نتیجہ صریح مماس اور مماس التمام کے جملے جو ارقام جیب اور جیب التمام میں ہیں ... مستنبط ہوتا ہے کہ

جب زاویہ کی علامت بدل جائے تو اونکے مماس اور مماس التمام کی بہی علامات بدل جائے

(۷) زاویون کے مثلثی جملون کے ارتباطات جو قوس کے علم مثلثی جملون کے ارتباط لکہے ہین اونہین سے ارتباطات زاویہ کے علم مثلثی جملونکے آسانی سے نق پر تقسیم کرنے سے استخراج ہو سکتے ہین

یا اسطرح سے

شکل صفحہ ۱۱ مین مثلث ب س ع اور ص س د قائم الزاویہ ہین تو بحکم (۴۷ش ۱م) یہہ حاصل ہونگے

$$\text{س ب}^2 = \text{ب ع}^2 + \text{س ع}^2$$

$$\text{س ط}^2 = \text{س ا}^2 + \text{ا ط}^2$$

$$\text{س ص}^2 = \text{س د}^2 + \text{د ص}^2$$

ان مساویون مین ہر ایک مساوات کو نق پر تقسیم کرو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$1 = \left(\frac{\text{ب ع}}{\text{نق}}\right)^2 + \left(\frac{\text{س ع}}{\text{نق}}\right)^2$$

$$\left(\frac{\text{س ط}}{\text{نق}}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\text{ا ط}}{\text{نق}}\right)^2$$

$$\left(\frac{\text{س ص}}{\text{نق}}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\text{د ص}}{\text{نق}}\right)^2$$

ان نسبتون کی جگہہ اونکے علم مثلثی قیمتین جو آخر فصل کی تعریفات مین بیان ہوئی ہین مندرج کرو تو ہمکو یہہ حاصل ہوتا ہے

$$1 = \text{جب}^2\,\text{ا} + \text{جم}^2\,\text{ا} \quad (1)$$

$$\text{قط}^2\,\text{ا} = 1 + \text{مس}^2\,\text{ا} \quad (2)$$

$$\text{قم}^2\,\text{ا} = 1 + \text{مم}^2\,\text{ا} \quad (3)$$

چونکہ مثلث س و ع اور ص س د متساوی الزوایا ہین تو بحکم (۴ش ۶م) کے یہہ تناسب حاصل ہونگے

اط : اس :: ب ع : س ع

دص : دس :: س ع : ع ب

س ط : س ا :: س ب : س ع

دس : دس :: س ا : ا ط

س ص : س د :: س ب : ب ع

ان تناسبہ کی ہر رقم کو لق پر تقسیم کرو +

اط/لق : ۱ :: ب ع/لق : س ع/لق

دص/لق : ۱ :: س ع/لق : ع ب/لق

س ط/لق : ۱ :: ۱ : س ع/لق

دص/لق : ۱ :: ۱ : اط/لق

س ص/لق : ۱ :: ۱ : ب ع/لق

ان نسبتوں کی جگہ علم مثلثی قیمتوں کے رکھنے سے یہہ حاصل ہوتا ہے +

کہ مس ا : ۱ :: جب ا : جم ا

ظم ا : ۱ :: جم ا : جب ا

قط ا : ۱ :: ۱ : جم ا

بم ا : ۱ :: ۱ : سک ا

قم ا : ۱ :: ۱ : حس ا

ان تناسب سے ہمکو یہہ حاصل ہوتا ہے +

مس ا = جب ا / جم ا (۴)

ظم ا = جم ا / جب ا (۵)

قط ا = ۱ / جم ا (۶)

قم ا = ۱ / جب ا (۷)

$$\text{حم ا} = \frac{1}{\text{حـا ا}} \quad (۸)$$

اور چونکہ اع = اس - س ع اور دف = دس - ب ع

$$\left.\begin{aligned} \text{ح ا} &= \text{ا - حم ا} \\ \text{جم ا} &= \text{ا - حـا ا} \end{aligned}\right\} (۹)$$

(۸) جملہا مستاویہ ان مساواتونکی وساطت سے ہر ایک جملہ ایک اور جملو کی رقمون مین بیان ہو سکتا ہے مثلا

فرض کرو کہ جیب ا کو جم ا کی رقمون مین بیان کرنا منظور ہو اور بالعکس تو بموجب مساوات (۱) کے

$$\text{جب ا} = \sqrt{\text{ا - جم}^2\text{ ا}} \quad (۱۰)$$

$$\text{جم ا} = \sqrt{\text{ا - جب}^2\text{ ا}} \quad (۱۱)$$

فرض کرو کہ مس ا کو جب ا کی رقمون مین بیان کرنا منظور ہے - مساوات (۴) مین جم ا کی جگہ قیمت اوسکی مساوات (۱۱) کی لکھو تو

$$\text{مس ا} = \frac{\text{جب ا}}{\sqrt{\text{ا - جب}^2\text{ ا}}} \quad (۱۲)$$

فرض کرو کہ مس ا کو جم ا کی رقمون مین بیان کرنا منظور ہے تو مساوات (۴) مین جب ا کی جگہ قیمت اوسکی مساوات (۱۰) کی لکھو تو

$$\text{مس ا} = \frac{\sqrt{\text{ا - جم}^2\text{ ا}}}{\text{جم ا}} \quad (۱۳)$$

فرض کرو کہ جم ا کو مس ا کی رقمون مین بیان کرنا منظور ہے بموجب مساوات (۷) کے

$$\text{جم ا} = \frac{1}{\text{قط ا}}$$

$$\text{بموجب مساوات (۲) کے قط ا} = \sqrt{\text{ا + مس}^2\text{ ا}}$$

$$\text{اسواسطے جم ا} = \frac{1}{\sqrt{\text{ا + مس}^2\text{ ا}}} \quad (۱۴)$$

فرض کرو کہ جب ا کو مس ا کی رقمون مین بیان کرنا منظور ہے بموجب مساوات (۴) کے

$$\text{حس ا} = \text{حم ا} \cdot \text{س ا}$$

اب حم ا کی قیمت مساوات (۱۴) والی اسمین رکہی تو

$$\text{حس ا} = \frac{\text{س ا}}{\sqrt{1+\text{س}^2\text{ ا}}} \quad (۱۵)$$

فرض کرو کہ جب ا کو قطا ا کی رقمون مین بیان کرنا منظور ہے

بموجب مساوات (۱) کے $\text{جب}^2\text{ ا} = 1 - \text{حم}^2\text{ ا}$

بجائی حم^2 ا کے قیمت اوسکی مساوات (۷) مین رکہو

$$\text{حس}^2\text{ ا} = 1 - \frac{1}{\text{قطا}^2\text{ ا}}$$

نسب نما متحد کیا تو اور جذر لیا تو

$$\text{جب ا} = \frac{\sqrt{\text{قطا}^2\text{ ا} - 1}}{\text{قطا ا}} \quad (۱۶)$$

فرض کرو کہ حم ا کو تم ا کی رقمون مین بیان کرنا منظور ہے

بموجب مساوات (۵) کے $\text{حم ا} = \text{تم ا} \cdot \text{حس ا}$

تم ا کی قیمت مساوات (۳) کی اور جب ا کی قیمت مساوات (۸) کی رکہی تو

$$\text{حم ا} = \frac{\sqrt{1 - \text{تم}^2\text{ ا}}}{\text{تم ا}} \quad (۱۷)$$

فرض کرو کہ مم ا کی قیمت قطا ا کی رقمون مین دریافت کرنی منظور ہے

بموجب مساوات (۷) اور (۲) کے

$$\text{مم ا} = \frac{1}{\sqrt{\text{قطا}^2\text{ ا} - 1}} \quad (۱۸)$$

فرض کرو کہ س ا کو جح ا کی رقمون مین بیان کرنا منظور ہے

بموجب مساوات (۱۳) کے $\text{س ا} = \frac{\sqrt{1 - \text{حم}^2\text{ ا}}}{\text{حم ا}}$

بجائی حم ا کے اوسکی قیمت مساوات (۵) کی لکہو تو

$$\text{س ا} = \frac{\sqrt{1 - (1 - \text{جح ا})^2}}{1 - \text{جح ا}}$$

اگر جذر کے نیچے کی مقدار کا اختصار کریں تو

$$\text{مس ا} = \frac{\sqrt{\text{۲ جع ا} - \text{جع}^2 \text{ ا}}}{\text{۱} - \text{جع ا}} \qquad (19)$$

امثلۂ مشق ۳

(۱) اگر جب ا = ۰٫۴۲ تو جم ا کا حساب بتاؤ

(۲) اگر مس ا = ۰٫۷ تو جم ا "

(۳) اگر مس ز = ۱ $\frac{1}{2}$ تو جس ا "

(۴) اگر جم ا = $\frac{5}{9}$ تو مس ا "

(۵) اگر جع ا = $\frac{3}{4}$ تو مس ا "

(۶) اگر مس ا = ۰٫۶ تو جس ا "

(۷) اگر قط ا = ۱ $\frac{3}{4}$ تو جس ا "

(۸) اگر جس ا = ۰٫۷ تو جم ا "

(۹) اگر مس ا = ۲۰ تو جب ا "

(۱۰) اگر جم ا = ۵ تو قط ا "

(۱۱) اگر جع ا = $\frac{1}{4}$ تو مس ا "

(۱۲) اگر جع ا = $\frac{1}{4}$ تو جب ا "

(۹) زاویوں کی تمامی

حد زاویہ جسقدر زاویۂ قائمہ سے کم ہوتا ہے اوسکو تمامی زاویہ یا متمم زاویہ کا کہتے ہیں مثلاً تمامی زاویہ ۶۰° کی ۳۰° اور ۴۹° ۳۲' کی ۴۰° ۲۸' اور ۴۳° ۴۶' ۳۰" کی ۴۶° ۱۳' ۳۰" ہے

اگر ا مقیاس قوسی کسی زاویہ کا ہو تو

$$\text{تمامی زاویہ ا} = \frac{1}{2}\text{ک} - \text{ا}$$

اگر ہ زاویہ میں ساٹھ ساٹھ کی تقسیم کے موافق درجوں کی تعداد ہو

تمامی ز = ۹۰ - ز

شکل ۳

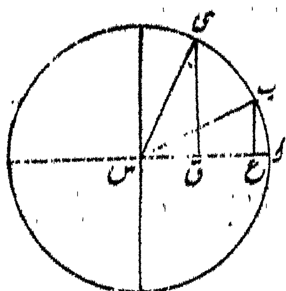
دعوی جیب کسی زاویہ کی اوسکی تمامی کی جیب التمام کی برابر ہوتی ہے

بیان دعوی فرض کرو کہ ا زاویہ ہے تو

حـ ا = حم (½ ک - ا) (۲۰)

عمل شکل س کے مرکز اور کسی طول س ا کے نصف قطر پر دائرہ کھینچو اور زاویہ ا س ب برابر زاویہ ا کے اور ا س ی برابر تمامی (½ ک - ا) کے بناؤ

اور ی ق اور ب ع عمود ا س پر نکالو



اثبات چونکہ زاویہ ق ی س تمامی زاویہ ا س ی کے برابر زاویہ ا س ب کے ہی اور زاویے س ع ب اور س ق ی دونو قائمے ہیں اور ب س برابر ہے ی س کے اسواسطے بحکم (۲۶ ش ام) کے ب ع برابر ہے س ق کے اور اسیواسطے

$$\frac{ب ع}{ب س} = \frac{س ق}{س ی}$$

لیکن $\frac{ب ع}{ب س}$ جیب ا کے اور $\frac{س ق}{س ی}$ جیب التمام (½ ک - ا) کے ہے اسیواسطے

حـ ا = جم (½ ک - ا) فہو المراد

چوتھی شکل

دعوی ہر ایک زاویہ کی جیب التمام اور اوسکی تمامی کی جیب آپس میں برابر ہوتی ہیں

بیان دعوی فرض کرو کہ ا زاویہ ہو تو

جم ا = حـ (½ ک - ا) (۲۱)

عمل شکل آخر پچھلی شکل کی طرح بناؤ

اثبات بحکم (۲۶ ش ام) کے خط س ع برابر خط ی ق کے اسیواسطے

$$\frac{\text{س ع}}{\text{س ب}} = \frac{\text{ی ق}}{\text{ی س}}$$ اسیواسطے

$$\text{جم ر} = \text{جیب}\left(\tfrac{1}{2}\,\text{کہ} - \text{ر}\right)$$ فہو المراد

پانچوین شکل

دعوی زاویہ کا مماس اور اوسکی تمامی کا مماس التمام آپسمین برابر ہوتا ہے

بیان دعوی فرض کرو کہ ر زاویہ ہو تو

$$\text{مس ر} = \text{مم}\left(\tfrac{1}{2}\,\text{کہ} - \text{ر}\right) \quad (۲۲)$$

اثبات مساوات (۲۰) کو مساوات (۲۱) پر تقسیم کرو تو یہہ حاصل ہوگا

$$\text{مس ر} = \text{مم}\left(\tfrac{1}{2}\,\text{کہ} - \text{ر}\right)$$ فہو المراد

چھٹی شکل

دعوی زاویہ کا مماس التمام اور اوسکی تمامی کا آپسمین برابر ہوتے ہین

بیان دعوی فرض کرو کہ ر زاویہ ہو

$$\text{مم ر} = \text{مس}\left(\tfrac{1}{2}\,\text{کہ} - \text{ر}\right) \quad (۲۳)$$

اثبات مساوات (۲۱) کو (۲۰) پر تقسیم کرو تو یہہ حاصل ہوگا

$$\text{مم ر} = \left(\tfrac{1}{2}\,\text{کہ} - \text{ر}\right)$$ فہو المراد

(۱۰) زاویون کا تکملہ یا مکمل

حد ایک زاویہ جسقدر دو قائمون سے کم ہو اوسکو تکملہ یا مکمل اوس زاویہ کا کہتے ہیں جیسے کہ تکملہ ۶۰° کا ۱۲۰° اور ۲۹° ۴۷' کا ۱۵۰° ۱۳' اور ۴۸° ۲۶' ۴۲'' کا ۱۳۱° ۳۳' ۱۸'' ہے

$$\text{تکملہ ر} = \text{کہ} - \text{ر}$$

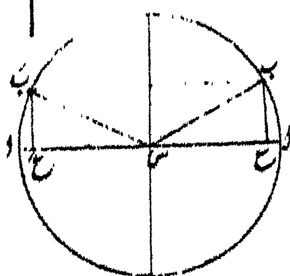
$$\text{تکملہ ر} = ۱۸۰° - \text{ر}$$

ساتوین شکل

دعوی زاویہ کی جیب اور اوسکی تکملہ کی جیب آپسمین برابر ہوتی ہین

بیان دعوی فرض کرو ا زاویہ ہے تو

جیب ا = حب (کہ - ا) (۲۴)



عمل شکل س کے مرکز اور کسی طول س و کے نصف قطر پر ایک دائرہ کھیچو اور زاویہ ا س ب برابر ا کے اور ا س بَ برابر (کہ - ا) کی بناؤ اور ا اَ پر عمود ب ع اور بَ عَ نکالو

اثبات چونکہ ع س بَ تکملہ زاویہ ع س ب کا ہے اور برابر ہے ع س ب کے اور زاویہ ع ب س اور بَ عَ س قائمی ہین اسواسطے بحکم (۲۶ ش ام) کے ب ع برابر ہے بَ عَ کے اور اسیواسطے

$$\frac{ب ع}{ب س} = \frac{بَ عَ}{بَ س}$$

لیکن $\frac{ب ع}{ب س}$ جیب زاویہ ا کی اور $\frac{بَ عَ}{بَ س}$ جیب (کہ - ا) کی ہے اسواسطے

حب ا = (کہ - ا) فہوالمراد

آٹھوین شکل

دعوی جیب اتمام زاویہ کی برابر اوسکے تکملہ کے جیب اتمام کی ہوتی ہے مگر اوسکی علامت بدلی ہوئی ہوتی ہے

بیان دعوی فرض کرو کہ ا زاویہ ہے تو

جم ا = - جم (کہ - ا) (۲۵)

عمل شکل آخر شکل کیطرح شکل بنا لو

اثبات بحکم (۲۶ ش ام) کے خط س ع اور س عَ آپسمین برابر ہین مگر وہ مرکز کے متقابل جانبون مین واقع ہین اسواسطے (فصل سوم) کی رو سے مختلف العلامات ہین

$$\frac{س ع}{س ب} = \frac{س ع}{س ت}$$

اسیواسطے حم ا = ـ حم (کہ ـ ا) فہوالمراد

نتیجہ مساوات ۲۴ کو مساوات ۲۵ پر تقسیم کرین تو یہہ حاصل ہوگا کہ

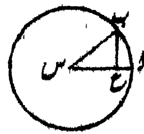
مس ا = ـ مس (کہ ـ ا) (۲۶)

(۱۱) جداول علم مثلثی ربعہ دائرہ مین ہر درجہ اور دقیقہ کے علم مثلثی جملون کا یعنی جیب اور جیب التمام اور مماس وغیرہا کا حساب کیا گیا ہے اور اونکی لوکارثمین جدولونمین اپنی اپنی پیشانی کے ماتحت لکھے ہین اونکے استعمال کا طریقہ اہنین جدولون کے ساتھہ ایک جدا رسالہ جداول لوکارثمی مین بیان ہوا یہان ہم اس بات کا ذکر نہین کرتے کہ ان جملون کے اعداد مین قیمت کس ترکیب اور حکمت سے نکالتے ہین مگر توضیح مطلب کیواسطے چند خاص زاویون کے جیب اور جیب التمام اور مماس کا ذکر کرتے ہین ٭

۴۵

فرض کرو کہ ۴۵ کی جیب اور جیب التمام اور مماس وغیرہا دریافت کرنے منظور ہین کسی مرکز س پر اور نصف قطر س ا = نق پر دائرہ کہیچو اور اس ب = ۴۵ کے بناؤ اور ب ع عمود اس پر نکالو ٭

مثلث قائم الزاویہ ب س ع کا متساوی الساقین



ہونا بدیہات سے ہے اور اسیواسطے بحکم (۴۷ ش ام) کے

$نق^2 = ۲ ب ع^2 = ۲ س ع^2$

۲ نق^2 پر ہر طرف مساوات کو تقسیم کرو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$\frac{۱}{۲} = \left(\frac{ب ع}{نق}\right)^2 = \left(\frac{س ع}{نق}\right)^2$$

لیکن $\frac{ب ع}{نق}$ = ح ۴۵ اور $\frac{س ع}{نق}$ = جم ۴۵

اسیواسطی جیب ۴۵° = جم ۴۵° = $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$

اور چونکہ جیب اور جیب التمام آپس مین برابر ہین اور مساوات (۴) اور (۵) سے یہہ استخراج ہوتا ہے کہ

مس ۴۵° = مم ۴۵° = ۱

اور مساوات (۲) اور (۳) سے اور مماس اور مماس التمام کی قیمتون سے یہہ مستنبط ہوتا ہے کہ

قط ۴۵° = قم ۴۵° = $\sqrt{۲}$

اگر ان اعداد کی قیمتون کا حساب پانچ مرتبہ کی اعشاریہ تک کرین تو یہہ جدول مرتب ہوگی۔

جب ۴۵°	=	۰٫۷۰۷۱۱
جم ۴۵°	=	۰٫۷۰۷۱۱
مس ۴۵°	=	۱٫۰۰۰۰۰
مم ۴۵°	=	۱٫۰۰۰۰۰
قط ۴۵°	=	۱٫۴۱۴۲۱
قم ۴۵°	=	۱٫۴۱۴۲۱

۶۰°

۶۰° کی جیب اور جیب التمام اور مماس وغیرہا دریافت کرنا



اگر ا س ب = ۶۰° تو ظاہر ہے کہ مثلث متساوی الاضلاع ہوگا

اور اسلیے عمود ب ع تنصیف ا س کی کرتا ہے اور اسیواسطے

جم ۶۰° = $\frac{\text{س ع}}{\text{س ب}} = \frac{۱}{۲}$

بموجب مساوات (۱۰) کے جب ۶۰° = $\sqrt{۱ - \text{جم}^۲ ۶۰°}$ = $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

بموجب مساوات (۴) کے مس ۶۰° = $\frac{\text{جب } ۶۰°}{\text{جم } ۶۰°}$ = $\sqrt{۳}$

بموجب مساوات (۵) کے مم ۶۰° = $\frac{۱}{\text{مس } ۶۰°}$ = $\frac{۱}{\sqrt{۳}}$

بموجب مساوات (۶) کے قط ۶۰° = $\frac{۱}{\text{جم } ۶۰°}$ = ۲

بموجب مساوات (٨) جم ٣٠° = جیب ٦٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

اگر ان قیمتوں کا حساب پانچ مرتبہ کی اعشاریہ تک کریں تو یہہ جدول مرتب ہوگی

جیب ٦٠° = ٠٫٨٦٦٠٢

جم ٦٠° = ٠٫٥٠٠٠٠

س ٦٠° = ١٫٧٣٢٠٥

مم ٦٠° = ٠٫٥٧٧٣٥

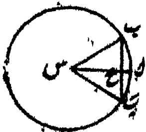
قط ٦٠° = ٢٫٠٠٠٠٠

قم ٦٠° = ١٫١٥٤٧٠

١٨°

فرض کرو کہ جیب اور جیب التمام وغیرہما ١٨° کی دریافت کرنی منظور ہے

فرض کرو کہ ا س ب = ١٨° عمود ب ع کو بڑھا کر محیط
سے نقطہ بَ پر ملاؤ تو ظاہر ہے کہ زاویہ ب س بَ



برابر دو چند ب س ا = ٣٦°

اس سے معلوم ہوتا ہے کہ ب بَ ضلع معشر منتظم کا ہے جو
دائرہ میں بنا ہے اور اسیواسطے بحکم (١١ ش ٤م) کے ب بَ برابر ہے نصف قطر کے بڑے
حصہ کے جو اوسکو ذات وسط والطرفین میں تقسیم کرنے سے پیدا ہوتا ہے اور اسیواسطے
بحکم (١١ ش ٣م) و (نتیجہ ١١ ش ٢م) کے

ب بَ = نق × $\frac{\sqrt{٥}-١}{٢}$

ب ع = $\frac{١}{٢}$ ب بَ اسیواسطے

جب ١٨° = $\frac{ب ع}{نق} = \frac{ب بَ}{٢ نق} = \frac{\sqrt{٥}-١}{٤}$

بموجب مساوات (١١) کے جم ١٨° = $\frac{\sqrt{١٠ + ٢\sqrt{٥}}}{٤}$

بموجب مساوات (۴) کے مس ۱۸° = $\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$

بموجب مساوات (۵) کے جم ۱۸° = $\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-1}$

بموجب مساوات (۶) کے قط ۱۸° = $\frac{4}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$

بموجب مساوات (۸) کے قم ۱۸° = $\frac{4}{\sqrt{5}-1}$

اگر ان قیمتوں کا حساب پانچ مرتبہ کی اعشاریہ تک کریں تو جدول ذیل مرتب ہوگی ؛

حب ۱۸° = ۰٫۳۰۹۰۲

حم ۱۸° = ۰٫۹۵۱۰۵

مس ۱۸° = ۰٫۳۲۴۹۲

مم ۱۸° = ۳٫۰۷۷۶۸

قط ۱۸° = ۱٫۰۵۱۴۶

قم ۱۸° = ۳٫۲۳۶۰۷

فرض کرو کہ حب ۱″ کی دریافت کرنی منظور ہے

صفحہ ۶ کے شکل مین فرض کرو کہ زاویۂ ب س ع برابر ایک ثانیہ کے ہے یہہ ظاہر ہے کہ ب ع اور قوس ب ا مین تفاوت اتنے مراتب اعشاریہ کا ہوگا جنکی تعداد معلوم ہو اور کل محیط کو اوتنے حصون مین تقسیم کرین جتنے ثانیے کہ چار قائمون مین ہوتے ہین تو ان حصون مین سے ایک حصہ برابر ہے قوس ا ب کے

اسیواسطے ب ع = ب ا = $\frac{۲ ک ل}{۶۰ \times ۶۰ \times ۳۶۰}$

اسیواسطے حب ۱″ = $\frac{ب ع}{ل}$ = $\frac{۲ ک}{۶۰ \times ۶۰ \times ۳۶۰}$

اگر اوسکی قیمت کا حساب اعشاریہ کے نو مرتبہ تک کرین تو یہہ حاصل ہوگا کہ

حب ۱″ = ۰٫۰۰۰۰۰۴۸۴۸

اور اگر اوسکا حصہ کسور عام ہی مین لینے دین تو اوسکا شمار کنندہ ۲ ہوگا اور

$$\text{حـ ا}^{\circ} = \frac{1}{206265}$$

اور باب اول کی مساوات (٣) کے ظاہر ہے کہ

$$= 1 \times 206265$$

اسیواسطے

$$\text{ا}^{\circ} = \frac{1}{\text{حـ ا}^{\circ}}$$

اسی مساوات کے ذریعہ سے مقیاس توسی کی تحویل درجون اور دقیقون اور ثانیون کیطرف اور بالعکس سکے رسالہ علم ہئیت مین ہم نے کی ہے

باب سوم

مثلثات قائم الزاویہ

(١) زاویون اور اضلاع کے درمیان ارتباطات

(٢) مثلثات قائم الزاویہ کی چار صورتین۔

(٣) چارون صورتون کا حساب بذریعہ جداول لوکارثمی

(١) اضلاع اور زاویون کے درمیان ارتباطات

ذیل کی شکلون مین مثلث قائم الزاویہ کے اضلاع اور وتر اور زاویائے فوق الوتر کے ارتباطات کا بیان ہے ÷

پہلی شکل

دعوی مثلث قائم الزاویہ مین ہر ایک ضلع برابر ہوتا ہے حاصل ضرب وتر اور اس ضلع کے زاویہ مقابل کے جیب کے یا زاویہ متصل کے جیب التمام کے

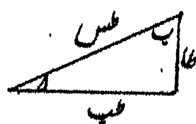
بیاد عوی فرض کرو کہ مثلث قائم الزاویہ مین طس وتر ہو اور طا اور طب اضلاع ہون اور ا اور ب مقابل کے زاویئے تو

طا = طس حـ ا اور طب = طس حم ا

طا = طس حم ب اور طب = طس حـ ب

عمل شکل فرض کرو کہ شکل بنائی جائے جیسی کہ یہہ کھچی ہوئی ہے

اثبات فصل ۴ باب ۲ کی شکل کے موافق



$\frac{\text{طا}}{\text{طس}}$ = جب ا = جم ب اور

$\frac{\text{طب}}{\text{طس}}$ = جم ا = جب ب

اسیواسطے طا = طس جب ا اور طب = طس جم ا

طا = طس جم ب اور طب = طس جب ب

مثلث قائم الزاویہ کے اضلاع اور زوایا، فوق الوتر کے درمیان جو ارتباطات ہین وہ شکل ذیل مین بیان کیئے جاتے ہین ۔

دوسری شکل

دعوی مثلث قائم الزاویہ مین ہر ایک ضلع برابر ہوتا ہے حاصل ضرب دوسرے ضلع اور زاویۂ مقابل کے مماس یا زاویہ متصل کے مماس التمام کے

بیان دعوی فرض کرو کہ شکل گذشتہ کیطرح ضلعے اور زاویئے تعبیر کیئے جائین ۔

طا = طب مس ا اور طب = طا مم ا

طا = طب مم ا اور طب = طا مس ا

اثبات آخر بیان دعوی مین اول مساوات کو دوسری مساوات سے اور تیسری مساوات کو چوتھی مساوات پر تقسیم کرین تو حاصل ہوگا کہ

$\frac{\text{طا}}{\text{طب}}$ = مس ا اور $\frac{\text{طب}}{\text{طا}}$ = مم ا

طا = طب مس ا اور طب = طا مم ا

طا = طب مم ب اور طب = طا مم ب

(۲) مثلثات قائم الزاویہ کی چار صورتین

(۱) پانچ مقادیر طا طب طس اور ا اور ب مین سے دو معلوم ہون تو باقی تین کا حساب ہوسکتا ہے

اب اسکی چار صورتین ہین یعنے

(۱) دو ضلعے معلوم ہین

(۲) ایک ضلع اور وتر معلوم ہے

(۳) ایک ضلع معلوم ہے اور کوئی ایک زاویہ

(۴) وتر معلوم ہے اور کوئی ایک زاویہ

اس کتاب کے آخر مین تین جدولین لکھی ہین اور اونکا نام اول اور دوم اور سوم جدول ہے اونکے وسیلہ سے یہہ اشلۂ مشق حل ہوتی ہین

صورت اول

طا اور طب معلوم ہین طس اور ا اور ب مطلوب ہین بموجب شکل دوم کے

مس ا = طا / طب

اس مساوات سے مس ا کا حساب ہوسکتا ہے اور جدولون سے ا دریافت ہوسکتا ہے

ب = ۹۰ - ا

اور طس کا حساب اس مساوات سے ہو جائے گا کہ

طس = √(طا² + طب²) بحکم (۴۷ ش ام) کے

اشلۂ مشق (۴)

(۱) معلوم ہے کہ طا = ۷۰۲،۲۷ اور طب = ۰۰۵ طس اور ا اور ب کو دریافت کرو

(۲) معلوم ہے کہ طا = ۷۰۴،۱۴۱ اور طب = ۰۵۰۳ طس اور ا اور ب کو دریافت کرو

(۳) معلوم ہے کہ طا = ۳۸،۷۲۱ اور طب = ۰۰۲ طس اور ا اور ب کو دریافت کرو

صورت دوم

طا اور طس معلوم ہین اور طب اور ا اور ب مطلوب ہین بموجب شکل اول کے

جب ا = طا / طس

جیب ا کا حساب اس مساوات سے ہو سکتا ہے اور جدولوں سے ا دریافت ہو سکتا ہے

ب = ۹۰° − ا

اور طب کا حساب اس مساوات سے کہ

طب = $\sqrt{\text{طس}^2 - \text{طا}^2}$ (۴۷ ش ام)

امثلہ مشق ۵

(۱) معلوم ہے کہ طا = ۱۵٫۱۳۰۳ اور طس = ۱۵ طب اور ا اور ب کو دریافت کرو

(۲) معلوم ہے کہ طا = ۱۲۸٫۷۶ اور طس = ۲۸۰ طب اور ا اور ب کو دریافت کرو

(۳) معلوم ہے کہ طا = ۱۴٫۵۷۶۷۵ اور طس = ۱۷۵ طب اور ا اور ب کو دریافت کرو

صورت سوم

طا اور ا معلوم ہیں ب اور طب اور طس مطلوب ہیں

بموجب شکل دوم کے طب = طا مم ا

بموجب شکل اول کے طس = $\frac{\text{طا}}{\text{جب ا}}$

ب = ۹۰° − ا

امثلہ مشق ۶

(۱) طا = ۱۷۲ اور ا = ۳۲° معلوم ہیں ب اور طب اور طس مطلوب ہیں

(۲) طا = ۳۱۵ اور ب = ۶۰° معلوم ہیں ا اور طب اور طس مطلوب ہیں

(۳) طا = ۲۱۰۰ اور ب = ۶۰° معلوم ہیں ا اور طب اور طس مطلوب ہیں

صورت چہارم

طس اور ا معلوم ہیں اور طا اور طب اور ب معلوم ہیں

بموجب شکل اول کے

طا = طس جب ا

طب = طس جم ا

ب = ۹۰ - ا

امثلہ مشق ۷

(۱) طس = ۲۴۰ اور ا = ۵۳ معلوم ہین ب اور طا اور طب مطلوب ہین

(۲) طس = ۵۷۵ اور ب = ۴۸ معلوم ہین ا اور طا اور طب مطلوب ہین

(۳) طس = ۷ اور ا = ۶۹ معلوم ہین ب اور طا اور طب مطلوب ہین

(۴) ان چارون صورتون کا حساب جداول لوکارثمی سے

مثالین جو ہم نے ابھی اوپر لکھی ہین اونکا حساب اصل جیبون کی جدولون سے ہوتا ہے نیچے جو مثالین لکھی ہین وہ فقط اسلئے لکھی ہین کہ جداول لوکارثمی کے استعمال مین مشق ہو جائے اور ان جدولون کی استعمال کی ترکیب ان جدولون کے رسالہ ہی مین لکھی ہین

صورت سوم

طا اور طب معلوم ہین ا اور ب اور طس مطلوب

بموجب شکل دوم

مس ا = $\frac{\text{طا}}{\text{طب}}$

ہر طرف مساوات کے لوکارثم لو

لوگ مس ا - ۱۰ = لوگ - لوگ طب

منتقل کرنیسے لوگ مس ا = ۱۰ + لوگ طا + لوگ طب

اور بموجب شکل اول

طس = $\frac{\text{طا}}{\text{جیب ا}}$

طرفین مساوات کی لوکارثم لی

لوگ طس = ۱۰ + لوگ طا - لوگ جب ا

قیمت ا کی جو دریافت کی گئی اوس سے بوساطت مساوات قیمت لوگ طس کی دریافت ہوسکتی ہے اور پھر لوگ طس سے قیمت طس کی بوسیلہ جدول کے دریافت ہوجائے گی *

مثال

طا = ۱۲۱ اور طب = ۹۴ کے معلوم ہیں ا اور ب اور طس مطلوب ہیں *

۱۰ + لوگ ۱۲۱ = ۱۲٫۰۸۲۷۹

لوگ ۹۴ = ۱٫۹۷۰۲۰

لوگ مس ا = ۱۰٫۱۰۹۲۵۹

لوگ ۵۲° ۷' = ۱۰٫۱۰۹۲۵۰

تفاوت جدولی = ۳۶   ۹ × ۶۰ / ۳۶ = ۱۵"

ا = ۵۲° ۷' ۱۵"

ب = ۳۷° ۵۲' ۴۵"

طس کو دریافت کرو   ۱۰ + لوگ ۱۲۱ = ۱۲٫۰۸۲۷۹

لوگ ۵۲° ۷' = ۹٫۸۹۷۰۱

۲٫۱۱۵۷۹

لوگ طس = ۲٫۱۱۵۷۷   طس = ۱۳۰٫۵۵

امثلہ مشق (۸)

(۱) طا = ۱۳ اور طب = ۴ معلوم ہیں طس اور زاویہ مطلوب

(۲) طا = امیل اور طب = ۲ فرلنگ، ہر چہ باقی ضلعے اور زاویئے دریافت کرو

(۳) طا = ۴۴ فیٹ ۸ انچ اور طب = ربع میل ا اور ب اور طس دریافت کرو

(۴) طا = ۱۳٫۴۱ اور طب = ۳۲٫۴۱ معلوم ہیں ا اور ب اور طس دریافت کرو

(۵) طا = ۱٫۰۰ اور طب = ۱۰۰۰ معلوم ہیں ا اور ب اور طس دریافت کرو

صورت دوم

طا اور طس معلوم ہیں طب اور ا اور ب مطلوب ہیں

بموجب شکل اول کے جیب ا = طا / طس

اسیواسطے لوگ جیب ا = ۱۰ + لوگ طا − لوگ طس

بحکم (۴۷ ش ا م) کی طب² = طس² − طا² = (طس + طا)(طس − طا)

دونو طرف کی لوگارثم لو تو

۲ لوگ طب = لوگ (طس + طا) + لوگ (طس − طا)

مثال

طا = ۱۳٫۲ اور طس = ۱۲۷ معلوم ہیں ا اور ب اور طب مطلوب ہیں

۱۰ + لوگ ۱۳٫۲ = ۱۱٫۱۲۰۵۷

لوگ ۱۲۷ = ۲٫۱۰۳۸۰

لوگ جیب ا = ۹٫۰۱۶۷۷

لوگ ۵° ۵۷′ = ۹٫۰۱۵۶۱

تفاوت جدول = ۱۲۱ ۱۱۶ × ۶۰ / ۱۲۱ = ۵۷″

ا = ۵° ۵۷′ ۵۷″

ب = ۸۴° ۲′ ۳″

طب کو دریافت کرو

طس + طا = ۱۴۰٫۲ طا − طس = ۱۱۳٫۸

لوگ ۱۴۰٫۲ = ۲٫۱۴۶۷۵

لوگ ۱۱۳٫۸ = ۲٫۰۵۶۱۴

۲) ۴٫۲۰۲۸۹

لوگ طب = ۲٫۱۰۱۴۴

طب = ۱۲۶٫۲۳

امثلہ مشق ۹

(۱) طا = ۵۱۲ اور طس = ۱۰۰۷ معلوم ہیں ا اور ب مطلوب ہیں

(۲) طا = ۱۲ء۳۲ اور طس = ۲ء۹۶ معلوم ہیں ا اور ب مطلوب ہیں

(۳) طا = ۱۴۳ اور طس = ۱۷۷ معلوم ہیں ا اور ب اور طب مطلوب ہیں

(۴) طا = ۵۷۶ اور طس = ۸۸۰ معلوم ہیں ا اور ب مطلوب ہیں

(۵) طا = ۷ء۱۲ اور طس = ۱۳ء۴۵ معلوم ہیں ا اور ب مطلوب ہیں

صورت سوم

طا اور ا معلوم ہیں ب اور طب اور طس مطلوب ہیں

بموجب شکل اول کے

طا = طس جب ا

جس سے لوگ طس = ۱۰ + لوگ طا ـ لوگ جب ا

بموجب شکل دوم کے

طا = طب مس ا

جس سے لوگ طب = ۱۰+ لوگ طا ـ لوگ مس ا

امثلہ مشق ۱۰

(۱) طا = ۱۳ اور ا = ۵ ۳۰ [illegible] معلوم ہیں ب اور طب اور طس مطلوب ہیں

(۲) طا = ۱۱ء۷ اور ب = ۵ ۳ ۲۷ معلوم ہیں ا اور طب اور طس ″

(۳) طا = ۸ء۲۵ اور ب = ۵ معلوم ہیں ا اور طب اور طس دریافت کرو

(۴) طا = ۱۴۲۶ اور ا = ۴ ۱۲ معلوم ہیں ب اور طب اور طس مطلوب ہیں

(۵) طا = ۵۷ء۲۸ اور ا = ۱۷ ۳۰ ۳ معلوم ہیں ب اور طب اور طس مطلوب ہیں

صورت [illegible]

طس . اور ا معلوم ہین اور طا اور طب اور ب مطلوب ہین

بموجب شکل اول طا = طس حا ا

طب = طس حم ا

جس سے لوگ طا = لوگ طس + لوگ جب ا – ۱۰

لوگ طب = لوگ طس + لوگ حم ا – ۱۰

امثلہ مشق (۱۱)

(۱) طس = ۱۰۰ اور ا = ۳۹° ۴۸' معلوم ہین قیمت ب اور طا اور طب مطلوب ہین

(۲) طس = ۱۷۶۰ اور ب = ۲۲° ۳' ۵۵" " قیمت ا اور طا اور طب "

(۳) طس = ۴۷،۳۲۸۲ اور ا = ۱۸° ۵' ۱۲" " ب اور طا اور طب "

(۴) طس = ۳،۹۷۸۱ اور ا = ۱۳° ۱' ۲" " ب اور طا اور طب "

(۵) طس = ۱۰۱۳ اور ب = ۱۰° " ا اور طا اور طب "

باب چہارم
قوانین علم مثلثی

(۱) اشکال اصولی (۲) اصول قوانین اربعہ (۳) قانون مجموعہ اور تفاوت جیبون اور جیب التمامون کے

(۴) دوچند زاویہ کی جیب اور جیب تمام کی قیمت زاویہ کی جیب اور جیب التمام کی رقمون مین +

(۵) جیب اور جیب التمام زاویہ کی قیمت نصف زاویہ کی جیب اور جیب تمام کی رقمون مین

(۶) تین زاویون کے مجموعہ کی جیب اور جیب التمام اور مماس کا قانون

(۷) سہ چند زاویہ کی جیب اور جیب التمام اور مماس کا قانون

اول اشکال اصولی اس باب مین دو یا زیادہ زاویون کے مجموعہ اور تفاوت کے جیب اور جیب التمام اور مماس کے ارتباطات باہمی کی تحقیقات کرین گے

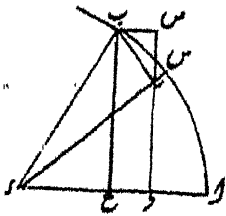
اس ساری تحقیقات کا مدار اشکال اصولی پر ہے اور ان شکلون کا استنباط اسطرح ہے +

شکل اول

دعوی اگر دو زاویون سے ایک زاویہ کی جیب کو دوسرے کے جیب اتمام مین ضرب دین اور دوسرے زاویہ کی جیب کو پہلے زاویہ کی جیب تمام مین ضرب دین تو مجموعہ ان حاصل ضربون کا برابر ان دونو زاویون کی جیب کے ہوگا

بیان دعوی فرض کرو کہ ا اور ب زاویئے ہون تو

جب (ا + ب) = جب ا جم ب + جم ا جب ب



عمل شکل د کو مرکز اور کسی طول دا کی نصف قطر پر دائرہ بناؤ ۔

اور ا د س = ا کے اور س د ب = ب بناؤ +

اور ب سے دا اور دس پر عمود ب ع اور ب ر لٹکا لو اور ر سے ر د عمود دا پر لٹکا لو اور

اور ب سے ب ص عمود ر د ممدودہ پر لٹکا لو ۔

اثبات چونکہ زاویہ د ر ب قائمہ ہے تو زاویہ ب ر ص تمامی زاویہ د ر د کے ہے اسیواسطے برابر ر د د = ا کے چونکہ ب ع برابر ہے ص د کے

تو ب ع = د ر + ر ص

ہر ایک طرف کو د ب پر تقسیم کرو ب ع / د ب = د ر / د ب + ر ص / د ب

اسیواسطے ب ع / د ب = د ر / د ر × د ر / د ب + ر ص / ر ب × ر ب / د ب

اور مثلثات قائم الزاویہ د ب ر اور د ر د اور د ع ب اور ص ب ر مین +

بموجب شکل اول باب سوم کے

ب ع / د ب = جب (ا + ب)

د ر / د ر = جب ا ، د ر / د ب = جم ب

ر ص / ر ب = جم ا ، ر ب / د ب = جب ب

اخیر مساوات مین ان قیمتون کو نسبتون کی جگہہ رکھنے سے یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

حب (ا + ب) = جیب ا جم ب + جم ا جیب ب　　　فہو المراد

نتیجہ　اگر ا = ب تو یہہ حاصل ہوگا کہ

جیب ۲ ا = جیب ا جم ا + جم ا جیب ا

جیب ۲ ا = ۲ جیب ا جم ا

یعنے دوچند زاویہ کی جیب برابر ہوتی ہے دوچند حاصل ضرب جیب اور جیب التمام اوس زاویہ کے

دوسری شکل

دعوی اگر دو زاویئے ہون تو اون دونو زاویون کی جیب التمامون کے حاصل ضرب مین سے اون کی جیبون کے حاصل ضرب کو تفریق کرین تو حاصل تفریق برابر اون زاویونکے مجموعہ کے جیب التمام کے ہوگا

بیان دعوی فرض کرو کہ ا اور ب زاویئے ہین تو

جم (ا + ب) = جم ا جم ب − جیب ا جیب ب

عمل شکل شکل اوسیطرح بناؤ جسطرح پہلے بنائی تھی

اثبات چونکہ ع ر برابر ہے ب ص کے تو ہمکو یہہ حاصل ہوگا کہ

د ع = د د − ب ص

اسیواسطے　د ع / ا ب = د د / ا ب − ب ص / ا ب

اسیواسطے　د ع / ا ب = د د / ا د × ا د / ا ب − ب ص / ب د × ب د / ا ب

ان نسبتونکی جگہہ اونکی قیمتین علم مثلثی جملونمین رکھو اور ان علم مثلثی جملونکا ذکر اول شکل کا ثبوت مین ہو چکا ہے تو یہہ حاصل ہوگا

جم (ا + ب) = جم ا جم ب − جیب ا جیب ب　　　فہو المراد

نتیجہ　اگر ا = ب تو یہہ حاصل ہوگا کہ

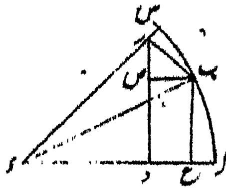
جم ۲ ا = جم۲ ا − جیب۲ ا

یعنے دو چند زاویہ کی جیب تمام برابر ہوتی ہے اوسکی جیب تمام کے مربع اور جیب کے مربع کے حاصل تفریق کے

تیسری شکل

دعوی اگر دو زاویے ہون اونمین ایک زاویہ کی جیب کو دوسرے زاویہ کی جیب مین ضرب دین اور حاصل ضرب مین سے پہلے زاویہ کی جیب تمام اور دوسرے زاویہ کی جیب کے حاصل ضرب کو تفریق کرین تو ماحصل جیب اون دونو زاویون کی تفاوت کے ہوگی

بیان دعوی فرض کرو کہ ا اور ب زاویے ہون تو



جیب (ا - ب) = جیب ا جم ب - جم ا جب ب

عمل شکل ر کے مرکز اور کسی طول ر ا کی نصف قطر سے دائرہ کھینچو اور ا ر س = ا اور

س ر ب = ب کے بناؤ اور نقطہ ب سے ب ر اور ب س پر عمود ب ع اور ب د نکالو اور

ر سے ر و عمود ب ا پر لٹکا لو اور نقطہ ب سے ب ص عمود ر د پر لٹکا لو

اثبات بموجب عمل شکل کے ب ر ص اور ر ر د مین سے ہر ایک تمامی زاویہ ر ر د کے ہے اسواسطے وہ آپسمین برابر ہین اور اسلیے زاویہ ب ر ص = ا اور

ب ع = ر د - ر ص

اسیواسطے ب ع / ر ب = ر د / ر ب - ر ص / ر ب

اسیواسطے ب ع / ر ب = د ر / ر ب × ر د / ر ب - ر ص / ب ر × ب ر / ر ب

ان نسبتون کی جگہ اونکی علم مثلثی قیمتون کے رکھنے سے یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

جیب (ا - ب) = جب ا جم ب - جم ا جب ب ہو المراد

چوتھی شکل

دعوی اگر دو زاویے ہون تو اونکے جیب التمام کے حاصل ضرب اور جیبون کا حاصل ضرب ملکر برابر ہوگا دونو زاویون کے تفاوت کی جیب التمام کے

بیان دعوی فرض کرو کہ ا اور ب زاویے ہون تو

جم (ا-ب) = جم ا جم ب + جب ا جب ب

عمل شکل آخر شکل کی طرح شکل بناؤ

اثبات چونکہ دز برابر ہے ب ص کے تو ہمکو یہہ حاصل ہوگا کہ

دع = در + ب ص

اسیواسطے دع/دب = در/دب + بص/دب

اسیواسطے دع/دب = در/در × در/دب + بص/بر × بر/دب

ان نسبتون کی جگہہ اونکے علم مثلثی قیمتین رکھنے سے یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

جم (ا-ب) = جم ا جم ب + جب ا جب ب فہو المراد

(۲) **چار اصولی قوانین مثلثی** چونکہ تمام دعوی علم مثلث بالجبر کے اہہین چارون شکلون پر مبنی ہین اسواسطے اونکو اصول قوانین مثلثی کہتے ہین اب ان سب کو یکجا کرکے لکھتے ہین

جب (ا+ب) = جب ا جم ب + جم ا جب ب (۱)

جم (ا+ب) = جم ا جم ب − جب ا جب ب (۲)

جب (ا-ب) = جب ا جم ب − جم ا جب ب (۳)

جم (ا-ب) = جم ا جم ب + جب ا جب ب (۴)

پانچوین شکل

دعوی اگر دو زاویے ہون اور اونکے مماسونکی حاصل جمع کو ایک منفی حاصل ضرب مماسون پر تقسیم کرین تو اونکے مجموعہ کا مماس حاصل ہوگا

بیان دعوی فرض کرو کہ ا اور ب زاویے ہین تو

مس (ا+ب) = (مس ا + مس ب)/(۱ − مس ا مس ب)

اثبات اگر ہم اول قانون مثلثی کی صورت کو دوسرے قانون مثلثی کی صورت پر تقسیم کرین تو یہہ حاصل ہوگا ؛

$$مس (ا + ب) = \frac{جب ا جم ب + جم ا جب ب}{جم ا جم ب - جب ا جب ب}$$

جانب راست کے شمار کنندہ اور نسب نما کو جم ا جم ب پر تقسیم کرو

$$مس (ا + ب) = \frac{\frac{جب ا}{جم ا} + \frac{جب ب}{جم ب}}{1 - \frac{جب ا}{جم ا} \cdot \frac{جب ب}{جم ب}}$$

اسواسطے $مس (ا + ب) = \frac{مس ا + مس ب}{1 - مس ا مس ب}$ فہو المراد

نتیجہ اگر ا = ب تو ہمکو یہہ حاصل ہوگا

$$مس ۲ ا = \frac{۲ مس ا}{1 - مس^2 ا}$$

یعنے دوچند مماس کو ایک منفی مربع مماس پر تقسیم کرین تو دوچند زاویہ کا مماس حاصل ہوتا ہے

چھٹی شکل

دعوی اگر دو زاویے ہون اور اونکے مماسون کی حاصل تفریق کو ایک جمع مماسونکے حاصل ضرب پر تقسیم کرین تو اونکے حاصل تفریق کا مماس حاصل ہوگا

بیان دعوی فرض کرو کہ ا اور ب زاویئے ہین تو

$$مس (ا - ب) = \frac{مس ا - مس ب}{1 + مس ا مس ب}$$

اثبات اگر ہم صدر قوانین مین سے تیسرے کو چوتھے پر تقسیم کرین ؛

$$مس (ا - ب) = \frac{جب ا جم ب - جم ب جب ب}{جم ا جم ب + جب ا جب ب}$$

شمار کنندہ اور نسب نما کو جم ا جم ب پر تقسیم کرین اور اختصار کرین تو یہہ حاصل ہوگا

$$مس (ا - ب) = \frac{مس ا - مس ب}{1 + مس ا مس ب}$$

(۱) قوانین جیبون اور جیب تمامون کی حاصل جمع و حاصل تفریق کے

صورت قوانین اصولی کی جمع اور تفریق کرنے سے یہہ چار بیانیہ جیبون اور جیب التماموں کی حاصل جمع اور حاصل تفریق کے لئے حاصل ہون گے ❊

جیب (ا+ب) + جب (ا − ب) = ۲ جیب ا جم ب (۵)

جیب (ا + ب) − جب (ا − ب) = ۲ جم ا جیب ب (۶)

جم (ا + ب) + جم (ا − ب) = ۲ جم ا جم ب (۷)

جم (ا + ب) − جم (ا − ب) − ۲ جیب ا جیب ب (۸)

بہت سیدہے سادے طور پر ان قوانین کی صورت بدلنے سے چار اور قوانین دو زاویوں کے جیب اور جیب التمام کے مجموعے اور حاصل تفریق کے لئے حاصل ہونگے ❊

فرض کرو کہ اَ = ا + ب اور بَ = ا − ب تو جمع اور تفریق سے یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

ا = ½(اَ+بَ) اور ب = ½ (اَ − بَ)

اب ہم اوپر کی مساوات (۵) مین ان قیمتوں کو رکہین تو یہہ حاصل ہوگا

جب اَ + جیب بَ = ۲ جیب ½ (اَ + بَ) جم ½ (اَ − بَ)

اور یہہ صورت بیانیہ ہے مخصوص اَ اور بَ کی کسی خاص قیمت کے ساتھہ نہین ہے اسلئے وہ ا اور ب کے لئے بہی درست اور صحیح ہے اسواسطے ہم زیر ان حرفوں پر اڑا سکتے ہین اور اس سبب سے طریقہ کتابت صور علم مثلث کا یکسان ہوجائے گا

اور علی ہذا القیاس اسی کے متشابہ مساوات (۶) اور (۷) اور (۸) سے یہہ مجموعہ مساواتون کا حاصل ہوسکتا ہے کہ

جب ا + جب ب = ۲ جب ½ (ا + ب) جم ½ (ا − ب) (۹)

جب ا − جب ب = ۲ جم ½ (ا + ب) جب ½ (ا − ب) (۱۰)

جم ا + جم ب = ۲ جم ½ (ا + ب) جم ½ (ا − ب) (۱۱)

جم ب − جم ا = ۲ جب ½ (ا + ب) جب ½ (ا − ب) (۱۲)

ساتوین شکل

دعوی کسی دو زاویون کے جیبون کے مجموعہ کو اونکے جیبون کے حاصل تفریق سے وہ نسبت ہوتی ہے جو اون زاویونکے نصف مجموعہ کے مماس کو اون زاویونکے نصف حاصل تفریق کے مماس سے نسبت ہے

بیان دعوی فرض کرو کہ ا اور ب زاویئے ہون تو

جب ا + جب ب : جب ا − جب ب :: مس ½ (ا + ب) : مس ½ (ا − ب)

اثبات اگر آخر مجموعہ مساوات ساتوین اول کو دوم پر تقسیم کرین تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$\frac{\text{جب ا + جب ب}}{\text{جب ا − جب ب}} = \frac{\text{۲ جب ½ (ا + ب) جم ½ (ا − ب)}}{\text{۲ جم ½ (ا + ب) جب ½ (ا − ب)}}$$

اسواسطے باب دوم کی (۴) اور (۵) مساوات کے موافق

$$\frac{\text{جب ا + جب ب}}{\text{جب ا − جب ب}} = \text{مس ½ (ا + ب) مم ½ (ا − ب)}$$

اور چونکہ مم ½ (ا − ب) مکافی مس (ا − ب) کا ہے اسواسطے

$$\frac{\text{جب ا + جب ب}}{\text{جب ا − جب ب}} = \frac{\text{مس ½ (ا + ب)}}{\text{مس ½ (ا − ب)}}$$

اور اس مساوات کو جب تناسب یا تماثل کے طور پر بیان کرین تو یہہ حاصل ہوگا کہ

جب ا + جب ب : جب ا − جب ب :: مس ½ (ا + ب) : مس ½ (ا − ب) فہو المراد

(۴) کسی دو چند زاویہ کی جیب اور جیب التمام کی قیمتون کا بیان اوس زاویہ کی جیب اور جیب التمام مین

بموجب نتیجہ شکل اول کے

$$\text{جب ۲ ا} = \text{۲ جب ا جم ا} \qquad (۱۳)$$

بموجب مساوات (۱) باب دوم کے

$$\text{۱} = \text{جم}^2\text{ ا} + \text{جب}^2\text{ ا}$$

بموجب نتیجہ دوم کے

جم ۲ ا = جم۲ ا - جب۲ ا

ان مساواتون کو جمع اور تفریق کرو تو

۱ + جم ۲ ا = ۲ جم۲ ا (۱۴)

۱ - جم ۲ ا = ۲ جب۲ ا (۱۵)

عمل انتقال سے دوچند زاویہ کی جیب تمام کے واسطے یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

جم ۲ ا = ۱ - ۲ جب۲ ا (۱۶)

جم ۲ ا = ۲ جم۲ ا - ۱ (۱۷)

۵ کسی زاویہ کی جیب اور جیب التمام کی قیمت نصف زاویہ کی جیب اور جیب التمام کی رقمون مین

ان مساواتون مین اگر بائین طرف ۲ ا کی جگہ ا کے رکھین تو دائین طرف ا کی جگہ ½ ا رکھنا چاہیئے اسواسطے

جب ا = ۲ جب ½ ا جم ½ ا (۱۸)

۱ + جم ا = ۲ جم۲ ½ ا (۱۹)

۱ - جم ا = ۲ جب۲ ½ ا (۲۰)

جم ا = ۲ جم۲ ½ ا - ۱ (۲۱)

جم ا = ۱ - ۲ جب۲ ½ ا (۲۲)

(۶) تین زاویونکے مجموعہ کی جیب و جیب التمام اور مماس کی صورتین

بموجب شکل اول کے ہمکو یہہ حاصل ہے کہ

جب (ا + ب + س) = جب (ا + ب) جم س + جم (ا + ب) جب س

= (جب ا جم ب + جم ا جب ب) جم س + (جم ا جم ب - جب ا جب ب) جب س

= جب ا جم ب جم س + جب ب جم ا جم س + جب س جم ا جم ب - جب ا جب ب جب س (۲۳)

بموجب شکل دوم کے

جم (ا + ب + س) =

جم (ا + ب) جم س - جیب (ا + ب) جیب س =

(جم ا جم ب - جیب ا جیب ب) جم س - (جیب ا جم ب + جم ا جیب ب) جیب س =

جم ا جم ب جم س - جم ا جیب ب جیب س - جم ب جیب س جیب ا - جم س جیب ا جیب ب (۴۴)

جب اسکے جملہ کو جم کے جملہ پر تقسیم کرنے سے اور شمار کنندہ اور نسب نما دونو کو جم ا جم ب جم س پر تقسیم کرنے سے تین زاویون کے مجموعے کے مماس کی صورت بیانیہ یہہ حاصل ہوگی

مس (ا + ب + س) = (مس ا + مس ب + مس س - مس ا مس ب مس س) ÷ (۱ - مس ا مس ب - مس ب مس س - مس س مس ا) (۴۵)

(۷) سہ چند زاویہ کی جیب اور جیب التمام اور مماس کی صور مثلثی

اگر ہم اخیر تین صورتون مین ا = ب = س کے فرض کرین تو یہہ ہمکو حاصل ہوگا

جیب ۳ ا = ۳ جیب ا - ۴ جیب^{3} ا (۴۶)

جم ۳ ا = ۴ جم^{3} ا - ۳ جم ا (۴۷)

مس ۳ ا = (۳ مس ا - مس^{3} ا) ÷ (۱ - ۳ مس^{2} ا) (۴۸)

پانچوان باب

صور علم مثلثی کی تبدیل صورت

علم مثلث یا الجبر کے قوانین اصولی کی صورتین جنھے تحریر کین اور اولسی اور صور قوانین مستنبط ہین اور صور قوانین سے ہمیشہ اور صورتین مستنبط ہوا کرتی ہین اس باب مین ہم اس امر کی مثالین لکھینگے اور مثال مین بتلائینگے کہ کونسی ترکیبین تبدیل صورت مین مستعمل ہوتی ہین۔

تحویل قوانین علم مثلث

(۱) مس ا + مم ا کو ایک مفرد جملہ علم مثلث میں بیان کرو

$$\text{مس ا} + \text{مم ا} = \frac{\text{جب ا}}{\text{جم ا}} + \frac{\text{جم ا}}{\text{جب ا}}$$

$$= \frac{\text{جب}^2\text{ ا} + \text{جم}^2\text{ ا}}{\text{جم ا جب ا}} = \frac{1}{\text{جم ا جب ا}}$$

$$= \frac{2}{2\,\text{جب ا جم ا}} = \frac{2}{\text{جب ۲ ا}} = 2\,\text{قم ۲ ا}$$

(۲) $\frac{\text{جب ا}}{1+\text{جم ا}}$ کو ایک مفرد جملہ علم مثلث میں بیان کرو

$$\frac{\text{جب ا}}{1+\text{جم ا}} = \frac{2\,\text{جب}\tfrac{1}{2}\text{ا جم}\tfrac{1}{2}\text{ا}}{2\,\text{جم}^2\tfrac{1}{2}\text{ا}} = \text{مس}\tfrac{1}{2}\text{ا}$$

(۳) $\frac{1-\text{جم ا}}{\text{جب ا}}$ کو ایک مفرد جملہ علم مثلث میں بیان کرو

$$\frac{1-\text{جم ا}}{\text{جب ا}} = \frac{2\,\text{جب}^2\tfrac{1}{2}\text{ا}}{2\,\text{جب}\tfrac{1}{2}\text{ا جم}\tfrac{1}{2}\text{ا}} = \text{مس}\tfrac{1}{2}\text{ا}$$

(۴) $\frac{\text{جم ا}}{1+\text{جب ا}}$ کو مفرد جملہ علم میں بیان کرو

$$\frac{\text{جم ا}}{1+\text{جب ا}} = \frac{\text{جب}(90^\circ-\text{ا})}{1+\text{جم}(90^\circ-\text{ا})} = \text{مس}(45^\circ-\tfrac{1}{2}\text{ا})$$

(۵) قم ا + مم ا کو مفرد جملہ علم مثلث کی طرف تحویل کرو

$$\text{قم ا} + \text{مم ا} = \frac{1+\text{جم ا}}{\text{جب ا}} = \text{مم}\tfrac{1}{2}\text{ا}$$

(۶) $\frac{1+\text{مم}^2\text{ ا}}{2\,\text{مم ا}}$ کو مفرد جملہ علم مثلث کیطرف تحویل کرو

$$\frac{1+\text{مم}^2\text{ ا}}{2\,\text{مم ا}} = \frac{\text{قم}^2\text{ ا}}{2\,\text{مم ا}} = \frac{\text{جب ا}}{2\,\text{جب}^2\text{ ا جم ا}}$$

$$= \frac{1}{2\,\text{جب ا جم ا}} = \frac{1}{\text{جب ۲ ا}} = \text{قم ۲ ا}$$

(۷) قط ا + مس ا کو ایک مفرد جملہ علم مثلث کیطرف تحویل کرو۔

$$\text{قط ا} + \text{مس ا} = \frac{1+\text{جب ا}}{\text{جم ا}}$$

$$= \frac{1-\text{جم}(90^\circ+\text{ا})}{\text{جب}(90^\circ+\text{ا})} = \text{مس}(45^\circ+\tfrac{1}{2}\text{ا})$$

(۸) جب ا مس ½ ا کو ایک مفرد جملہ علم مثلث کی طرف تحویل کرو

$$\text{جب ا مس}\tfrac{1}{2}\text{ا} = 2\,\text{جب}\tfrac{1}{2}\text{ا جم}\tfrac{1}{2}\text{ا مس}\tfrac{1}{2}\text{ا}$$

$$= 2\,\text{جب}^2\tfrac{1}{2}\text{ا} = 1 - \text{جم ا}$$

(۹) $\text{جم}^4\text{ ا} - \text{جب}^4\text{ ا}$ کو ایک مفرد جملہ علم مثلثی کیطرف تحویل کرو

$$\text{جم}^4\text{ ا} - \text{جب}^4\text{ ا} = (\text{جم}^2\text{ ا} + \text{جب}^2\text{ ا})(\text{جم}^2\text{ ا} - \text{جب}^2\text{ ا})$$

$$= \text{جم}^2\text{ ا} - \text{جب}^2\text{ ا} = \text{جم ۲ ا}$$

(۱۰) $\frac{\text{جب ا + جب ۳ ا}}{\text{جم ا + جم ۳ ا}}$ کی تحویل ایک مفرد جملہ علم مثلثی کی طرف تحویل کرو

بموجب سوالات (۹) اور (۱۱) باب چہارم کے

شمار کنندہ = ۲ جب ۲ ا جم ا

نسب نما = ۲ جم ۲ ا جم ا

اسواسطے

$$\frac{\text{جب ا + جب ۳ ا}}{\text{جم ا + جم ۳ ا}} = \text{مس ۲ ا}$$

(۱۱) $\frac{\text{مم ا + مس ا}}{\text{مم ا - مس ا}}$ کو جملہ مفرد بناؤ

$$\text{شمار کنندہ} = \frac{\text{جم ا}}{\text{جب ا}} + \frac{\text{جب ا}}{\text{جم ا}} = \frac{\text{جم}^2\text{ ا} + \text{جب}^2\text{ ا}}{\text{جب ا جم ا}}$$

$$\text{نسب نما} = \frac{\text{جم ا}}{\text{جب ا}} - \frac{\text{جب ا}}{\text{جم ا}} = \frac{\text{جم}^2\text{ ا} - \text{جب}^2\text{ ا}}{\text{جب ا جم ا}}$$

اور $\text{جم}^2\text{ ا} + \text{جب}^2\text{ ا} = ۱$ اور $\text{جم}^2\text{ ا} - \text{جب}^2\text{ ا} = \text{جم ۲ ا}$

تو تقسیم سے یہہ حاصل ہوگا :

$$\frac{\text{مم ا + مس ا}}{\text{مم ا - مس ا}} = \frac{۱}{\text{جم ۲ ا}} = \text{قط ۲ ا}$$

(۱۲) $\frac{\text{جب ا + جب ۳ ا + جب ۵ ا}}{\text{جم ا + جم ۳ ا + جب ۵ ا}}$ کو جملہ مفرد بناؤ

باب چہارم کی مساوات (۹) اور (۱۱) کو اول اور آخر ارقام شمار کنندہ اور نسب نما میں استعمال کرنے سے یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

شمار کنندہ = جب ۳ ا (۱ + ۲ جم ۲ ا)

نسب نما = جم ۳ ا (۱ + ۲ جم ۲ ا)

اسیواسطے تقسیم کرنے سے

$$\frac{\text{جب ا + جب ۳ ا + جب ۵ ا}}{\text{جم ا + جم ۳ ا + جم ۵ ا}} = \text{مس ۳ ا}$$

تحویل قوانین علم مثلثہ

(١٣) اس مساوات کو ثابت کرو

جب (ا + ب) جب (ا − ب) = جب^{2} ا − جب^{2} ب

اگر باہم مساوات (١) اور (٣) باب چہارم کو بجائی جب (ا + ب) اور جب (ا − ب) کی ضرب دیں تو یہہ حاصل ہوگا کہ

جب (ا + ب) جب (ا − ب) = جب^{2} ا جم^{2} ب − جم^{2} ا جب^{2} ب

= جب^{2} ا (١ − جب^{2} ب) − (١ − جب^{2} ا) جب^{2} ب

= جب^{2} ا − جب^{2} ب

(١٤) اس مساوات کو ثابت کرو کہ

جم (ا + ب) جم (ا − ب) = جم^{2} ا − جب^{2} ب

جم (ا + ب) اور جم (ا − ب) کی صور مفصلہ کو باہم ضرب دو اور جم^{2} ب کی جگہ اوس کی قیمت ١ − جب^{2} ب اور جب^{2} ا کی جگہ اوسکی قیمت ١ − جم^{2} ا رکھو تو مساوات ثابت ہو جائے گی

(١٥) اس مساوات کو ثابت کرو

مس^{2} ا − مس^{2} ب = جب (ا + ب) جب (ا − ب) / جم^{2} ا جم^{2} ب

مس^{2} ا − مس^{2} ب = (مس ا + ب) (مس ا − مس ب)

مس ا + مس ب = جب ا / جم ا + جب ب / جم ب = جب ا جم ب + جم ا جب ب / جم ا جم ب

= جب (ا + ب) / جم ا جم ب

اور ایسے ہی مس ا − مس ب = جب (ا − ب) / جم ا جم ب

اب ضرب کرنے سے

مس^{2} ا − مس^{2} ب = جب (ا + ب) جب (ا − ب) / جم^{2} ا جم^{2} ب

(١٦) مساوات ا جب لا + ب جم لا = ج کو حل کرو

ا حب لا − ح = − ب حم لا

(ا حب لا − ح)² = ب² حم² لا = ب² (ا − حب² لا)

اس مساوات کو مختصر کرکے ہم یہہ مساوات درجۂ دوم جب لا کی حل کرتے ہین

(ا² + ب²) حب² لا − ۲ ا ح حب لا − (ب² − ح²) = ۰

اور اسکی قیمت یہہ ہے کہ

حب لا = (ا ح ± ب √(ا² + ب² − ح²)) / (ا² + ب²)

قیمت لا کی اس مساوات سے بذریعۂ زاویۂ مستعان صہ کے بہی اسطرح حاصل ہوسکتی ہے کہ فرض کرو صہ ایسا زاویہ ہے کہ ب = ا ظس صہ اس قیمت کی مساوات مفروض مین رکہو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

ا (حب لا + حم لا ظس صہ) = ح

ہر ایک طرف مساوات کو حم صہ مین ضرب دو تو

ا (حب لا حم صہ + حم لا حب صہ) = ح حم صہ

یعنے ا حب (لا + صہ) = ح حم صہ

اس قیمت لا + صہ کی معلوم ہوگی اور صہ بالفعل تمکو مساوات ب = ا ظس صہ سے دریافت ہوسکتا ہے

(۷) مساوات ا ظس لا = ب حم لا کو حل کرو

طرفین مساوات کو حم لا مین ضرب دو تو

ا حب لا = ب حم² لا = ب (ا − حب² لا)

اسیواسطے حب² لا + (ا/ب) حب لا − ۱ = ۰

حب لا = (− ا ± √(ا² + ۴ ب²)) / ۲ ب

(۸) ان ہمزاد مساواتون کو حل کرو

جب لا + جب ی = ا

جم لا + جم ی = ب

مساوات (۹) اور (۱۱) باب چہارم سے

۲ جب ½ (لا + ی) جم ½ (لا − ی) = ا

۲ جم ½ (لا + ی) جم ½ (لا − ی) = ب

اسواسطے تقسیم کرنے سے مس ½ (لا + ی) = ا/ب

ہر مساوات کو مجذور کرنے سے اور پھر اونکو جمع کرنے سے ہمکو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

جم² ½ (لا − ی) = ¼ (ا² + ب²)

پس جب قیمتین ½ (لا + ی) اور ½ (لا − ی) کی دریافت ہو گئین تو مقادیر لا اور ی کی جمع اور تفریق کرنے سے معلوم ہو سکتی ہین

چھٹا باب

مثلثات غیر قائم الزاویہ

(۱) اضلاع اور زاویونکے ارتباطات (۲) جیب التمام زاویونکی اضلاع کی ارقام مین
(۳) جیب زاویونکی اضلاع کی رقمون مین (۴) نصف زاویون کی جیب اور جیب التمام اور مماس
(۵) رقبہ مثلث کا اضلاع کی رقمون مین (۶) مثلثات مستوی کی پانچ صورتین

(۱) اضلاع اور زاویون کے ارتباطات

مثلثات غیر قائم الزاویہ کے حل کرنے کے واسطے ضرور ہے کہ بعض اشکال او قوانین کو ثابت اور قائم کرین جنسے کہ اضلاع اور زاویونکی علم مثلثی جملون کا باہمی ربط ظاہر ہو

شکل اول

دعوی مثلث کے دو ضلعون مین وہ نسبت ہوتی ہے جو اونکے مقابل کے زاویونکی جیب مین

بیان دعوی فرض کرو کہ دو ضلعے طا اور طب اور اونکی مقابل کے زاویے

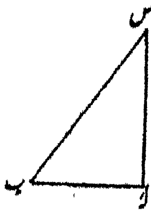
ا اور ب ہین تو

طا : طب :: جب ا : جب ب

صورت اول

اگر ایک زاویہ قائمہ ہو

عمل شکل ایک مثلث قائم الزاویہ اس ب ایسا مرتسم کرو جیسا کہ یہہ کھچا ہوا ہے اور فرض کرو کہ زاویہ س ا ب = ا اور س ب ا = ب اور ان کے مقابل کے ضلعے طا اور طب ہین



اثبات بموجب شکل باب سوم کے

طب = طا جب ب

طا : طب :: ا : جب ب

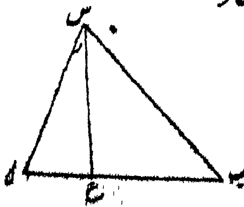
لیکن ا زاویہ قائمہ ہے اسواسطے جب ا = ا اور اسیواسطے

طا : طب :: جب ا : جب ب فہو المراد

صورت دوم

اگر دو نو زاویئے حادّے ہون

عمل شکل مثلث ا ب س غیر قائم الزاویہ ایسا بناؤ جیسا کہ یہہ بنا ہوا ہے اور س ع عمود ا ب پر ڈالو اور ب س = طا اور ا س = طب اور س ا ب = ا اور س ب ا = ب کے بناؤ



اثبات مثلثات قائم الزاویہ ا س ع اور ب س ع ہین بموجب شکل اول باب سوم کے

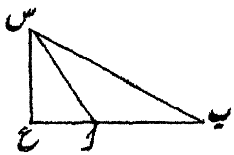
س ع = طب جب ا اور س ع = طا جب ب

اس واسطے طا جب ب = طب جب ا

یعنے طا : طب :: جب ا : جب ب

صورت سوم

اگر ایک زاویہ حادہ ہو



عمل شکل مثلث ا س ب ایسا بناؤ جیسا کہ یہ بنا ہوا ہے جسکا زاویہ ا منفرجہ ہے س ع عمود ا ب ممدودہ پر لگا لو

اثبات مثلث س ع ا مین س ع = س ا جب س ا ع

اور س ا ع تکملہ س ا ب یا ا کا ہے اسواسطے

س ع = طب جب ا

اور نیز مثلث س ع ب قائم الزاویہ مین س ع = طا جب ب

اسیواسطے طا جب ب = طب جب ا

یعنے طا : طب :: جب ا : جب ب فھو المراد

اضلاع اور اونکی مقابل کے زاویون کی جیبون مین جو تناسب ہوتا ہے اوسکو قاعدہ جیوب کہتے ہین

دوسری شکل

دعوی مثلث مستوی مین مجموعہ اضلاع کو تفاوت اضلاع سے وہ نسبت ہوتی ہے جو فوق القاعدہ کے زاویون کے نصف مجموعہ کے مماس کو اونکی نصف تفاوت کے مماس سے نسبت ہے

بیان دعوی فرض کرو کہ اضلاع طا اور طب اور قاعدہ پر اونکی مقابل کے زاویے ا اور ب ہین تو

طا + طب : طا − طب :: مس $\frac{1}{2}$ (ا + ب) : مس $\frac{1}{2}$ (ا − ب)

اثبات موافق آخر شکل کے

طا : طب :: جب ا : جب ب

ترکیب اور تفصیل نسبت سے

طا + طب : طا - طب :: جب ا + جب ب : جب ا - جب ب

اسیواسطے بحکم ساتوین شکل باب چہارم کے

طا + طب : طا - طب :: مس $\frac{1}{2}$ (ا + ب) : مس $\frac{1}{2}$ (ا - ب) فہو المراد

تیسری شکل

دعوی مثلث مستوی مین قاعدہ کو مجموعۂ اضلاع سے وہ نسبت ہوتی ہے جو زوایا فوق القاعدہ کے نصف مجموعہ کی جیب تمام کو اونکے نصف تفاوت کے جیب تمام سے اور نیز قاعدہ کو اضلاع کے تفاوت سے وہ نسبت ہوتی ہے جو زوایا فوق القاعدہ کے نصف مجموعہ کی جیب کو اون کے نصف تفاوت کی جیب سے

بیان دعوی فرض کرو کہ مثلث کے اضلاع اور قاعدہ طا اور طب اور طس اور اونکے مقابل کے زاویے ا اور ب اور س ہین

طس : طا + طب :: جم $\frac{1}{2}$ (ا + ب) : جم $\frac{1}{2}$ (ا - ب)

طس : طا - طب :: جب $\frac{1}{2}$ (ا + ب) : جب $\frac{1}{2}$ (ا - ب)

دعوی کا جزو اول

اثبات بموجب شکل اول کے اس سبب سے کہ (ا + ب) تکملہ س کا ہے

جب (ا + ب) = جب س اور اس سے یہ مساواتین حاصل ہوتی ہین کہ

$$\frac{\text{طا}}{\text{طس}} = \frac{\text{جب ا}}{\text{جب (ا + ب)}} \quad \frac{\text{طب}}{\text{طس}} = \frac{\text{جب ب}}{\text{جب (ا + ب)}}$$

جمع کرنے سے

$$\frac{\text{طا + طب}}{\text{طس}} = \frac{\text{جب ا + جب ب}}{\text{جب (ا + ب)}}$$

شمار کنندہ = ۲ جب $\frac{1}{2}$ (ا + ب) جم $\frac{1}{2}$ (ا - ب) بموجب مساوات (۹) باب چہارم کے

مخرج نسبت نما = ۲ جب $\frac{1}{2}$ (ا + ب) جم $\frac{1}{2}$ (ا + ب) بموجب مساوات (۱۸) باب چہارم کے

اسیواسطے

$$\frac{\text{طا}+\text{طب}}{\text{طس}} = \frac{\text{جم}\ \tfrac{1}{2}\ (\text{ا}-\text{ب})}{\text{جم}\ \tfrac{1}{2}\ (\text{ا}+\text{ب})}$$

یعنے طس : طا+طب :: جم $\tfrac{1}{2}$ (ا+ب) : جم $\tfrac{1}{2}$ (ا−ب)

دعوی کا جزو دوم

اثبات تفریق کرنے سے

$$\frac{\text{طا}-\text{طب}}{\text{طس}} = \frac{\text{حب ا}-\text{حب ب}}{\text{حب}\ (\text{ا}+\text{ب})}$$

اوراسیطرح قیمتون کے رکھنے سے

طس : طا−طب :: حب $\tfrac{1}{2}$ (ا+ب) : حب $\tfrac{1}{2}$ (ا−ب)

فہو المراد

چوتھی شکل

دعوی مثلث مستوی مین زاویہ حادہ یا منفرجہ مقابل کے ضلع کا مربع اوس زاویہ کے دو ضلعون کے مربعون کے مجموعہ سے بقدر دوچند سطح اون اضلاع اور اوس زاویہ کی جیب التمام کے کم ہوتا ہے

بیان دعوی فرض کرو کہ اضلاع مثلث کے طا اور طب اور طس اور اونکے مقابل کے زاویے ا اور ب اور س ہین تو

$$\text{طا}^2 = \text{طب}^2 + \text{طس}^2 - 2\ \text{طب طس جم ا}$$

$$\text{طب}^2 = \text{طس}^2 + \text{طا}^2 - 2\ \text{طس طا جم ب}$$

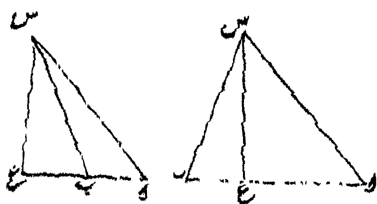
$$\text{طس}^2 = \text{طا}^2 + \text{طب}^2 - 2\ \text{طا طب جم س}$$

صورت اول

زاویہ حادہ ہو

عمل شکل فرض کرو کہ ا زاویہ حادہ ان مثلثوں میں سے ہر ایک میں ہے نقطہ س سے

س ع عمود اب پر لگاؤ



اثبات بحکم (۱۳ اش ۲م) کے

ب س۲ = ا س۲ + ا ب۲ − ۲ اب × اع

اول شکل باب سوم کے

اع = اس جم ا

اس قیمت کو اع کی جگہہ رکھو اور طا اور طب اور طس بجائے ب س اور اس اور

اب کے لکھو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

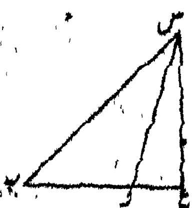
طا۲ = طب۲ + طس۲ − ۲ طب طس جم ا

صورت دوم

اگر مقابل کا زاویہ منفرجہ ہو

عمل شکل فرض کرو کہ اس مثلث میں زاویہ ا منفرجہ ہے

س سے عمود س ع اب خارج شدہ پر لگاؤ



اثبات بحکم (۱۲ اش ۲م) کے

ب س۲ = اس۲ + اب۲ + ۲ اب × اع

لیکن اع = اس جم ع اس کے اور چونکہ زاویے ع اس اور ب اس

باہم تکملے ہیں اسواسطے اونکی جیب التمام متساوی ہیں مگر علامتیں اونکی مختلف ہیں

اسواسطے اع = − اس جم ا

اس قیمت کے رکہنے سے ہمکو وہی حاصل ہوتا ہے جو پہلے حاصل ہو چکا ہے کہ

$$\text{طا}^2 = \text{طب}^2 + \text{طس}^2 - 2\,\text{طب}\,\text{طس}\,\text{جم ا}$$ ھو المراد

(۲) زاویون کی جیب التمام کی قیمتین اضلاع کی رقمون مین

آخر شکل کی بیان دعوی سے زاویون کی جیب التمامون کی قیمت اضلاع کے رقمون مین بہ تفصیل ذیل دریافت ہونگین *

(۱)

$$\text{جم ا} = \frac{\text{طب}^2 + \text{طس}^2 - \text{طا}^2}{2\,\text{طب}\,\text{طس}}$$

$$\text{جم ب} = \frac{\text{طس}^2 + \text{طا}^2 - \text{طب}^2}{2\,\text{طس}\,\text{طا}}$$

$$\text{جم س} = \frac{\text{طا}^2 + \text{طب}^2 - \text{طس}^2}{2\,\text{طا}\,\text{طب}}$$

(۳) زاویون کی جیبونکی قیمت اضلاع کی رقمون مین

جیب التمام کی صور بیانیہ سے مجذورون کو ایک سے تفریق کرنے سے ہمکو زاویون کے جیبونکی مجذور اضلاع کی رقمون مین بہ تفصیل ذیل معلوم ہونگی

(۱) (۲)

$$\text{جیب}^2\,\text{ا} = \frac{2\,\text{طا}^2\text{طب}^2 + 2\,\text{طب}^2\text{طس}^2 + 2\,\text{طس}^2\text{طا}^2 - \text{طا}^4 - \text{طب}^4 - \text{طس}^4}{4\,\text{طب}^2\,\text{طس}^2}$$

$$\text{جیب}^2\,\text{ب} = \frac{2\,\text{طا}^2\text{طب}^2 + 2\,\text{طب}^2\text{طس}^2 + 2\,\text{طس}^2\text{طا}^2 - \text{طا}^4 - \text{طب}^4 - \text{طس}^4}{4\,\text{طس}^2\,\text{طا}^2}$$

$$\text{جیب}^2\,\text{س} = \frac{2\,\text{طا}^2\text{طب}^2 + 2\,\text{طب}^2\text{طس}^2 + 2\,\text{طس}^2\text{طا}^2 - \text{طا}^4 - \text{طب}^4 - \text{طس}^4}{4\,\text{طا}^2\,\text{طب}^2}$$

اگر ان جملون کو طا² و طب² و طس² پر تقسیم کرین تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$\frac{\text{جیب}^2\,\text{ا}}{\text{طا}^2} = \frac{\text{جیب}^2\,\text{ب}}{\text{طب}^2} = \frac{\text{جیب}^2\,\text{س}}{\text{طس}^2}$$

ان نسبتون مین ہر ایک برابر ہے اس ذوالقرنیہ جملہ طا اور طب اور طس کے یعنی

$$\frac{2\,\text{طا}^2\text{طب}^2 + 2\,\text{طب}^2\text{طس}^2 + 2\,\text{طس}^2\text{طا}^2 - \text{طا}^4 - \text{طب}^4 - \text{طس}^4}{4\,\text{طا}^2\,\text{طب}^2\,\text{طس}^2}$$ ہے

ان مساواتون کو بہ تفصیل ذیل بیان کرتے ہین اور وہ بالکل مطابق قاعدہ جیبونکی

$$\text{طا} : \text{طب} : \text{طس} :: \text{جیب ا} : \text{جیب ب} : \text{جیب س}$$

جو صور بیانیہ ہم نے جیب زاویون کی بیان کی ہے اوسمین ارقام مقدر ہین

اسواسطے اونکا حساب بذریعہ کارتم کے نہین ہوسکتا ہے اسواسطے ہم ایسی قیمتین جیبون کی اضلاع کی رقمون مین استنباط کرتے ہین جسمین رقمین اجزاء ضربی سے ترکیب پاتی ہون اور اس سبب سے اونکا حساب لوکارتم سے نہایت آسان ہو

فرض کرو کہ زاویہ کی جیب کو اضلاع کی رقمون مین بیان کرنا منظور ہے +

$$\text{جب}^2\,\text{ا} = ۱ - \text{جم}^2\,\text{ا}$$

اسیواسطے

$$\text{جب}^2\,\text{ا} = (۱ + \text{جم ا})\,(۱ - \text{جم ا})$$

ان جملون مین قیمت جدا جدا بوسیلہ مساوات (۱) کے دریافت کرتے ہین

$$۱ + \text{جم ا} = ۱ + \frac{\text{طب}^2 + \text{طس}^2 - \text{طا}^2}{۲\,\text{طب طس}}$$

$$= \frac{۲\,\text{طب طس} + \text{طب}^2 + \text{طس}^2 - \text{طا}^2}{۲\,\text{طب طس}}$$

$$= \frac{(\text{طب} + \text{طس})^2 - \text{طا}^2}{۲\,\text{طب طس}}$$

لیکن دو مقدارون کے مربعون کا تفاوت برابر ہوتا ہے اونکی حاصل جمع اور حاصل تفریق کی حاصل ضرب کے

$$۱ + \text{جم ا} = \frac{(\text{طا} + \text{طب} + \text{طس})\,(\text{طب} + \text{طس} - \text{طا})}{۲\,\text{طب طس}}$$

اور اسیواسطے

$$۱ - \text{جم ا} = ۱ - \frac{\text{طب}^2 + \text{طس}^2 - \text{طا}^2}{۲\,\text{طب طس}}$$

$$= \frac{۲\,\text{طب طس} - \text{طب}^2 - \text{طس}^2 + \text{طا}^2}{۲\,\text{طب طس}}$$

$$= \frac{\text{طا}^2 - (\text{طب} - \text{طس})^2}{۲\,\text{طب طس}}$$

مربعون کے حاصل تفریق کی جگہ مجموعہ اور تفاوت کا حاصل ضرب لکھین تو

$$۱ - \text{جم ا} = \frac{(\text{طس} + \text{طا} - \text{طب})\,(\text{طا} + \text{طب} - \text{طس})}{۲\,\text{طب طس}}$$

(۱ + جم ا) اور (۱ − جم ا) کے واسطے جو جملے بنائے ہوئے ہین تو اونکو ضرب دینے سے

$$\text{جب}^2\,\text{ا} = \frac{(\text{طا} + \text{طب} + \text{طس})\,(\text{طب} + \text{طس} - \text{طا})\,(\text{طس} + \text{طا} - \text{طب})\,(\text{طا} + \text{طب} - \text{طس})}{۴\,\text{طب}^2\,\text{طس}^2}$$

اب ہم اس جملہ کی صورت اور زیادہ سادی بناتے ہین اور اوسکے واسطے یہ فرض

کرتے ہین کہ ص سے مثلث کے نصف مجموعہ اضلاع کو تعبیر کرتا ہے تو

$$۲\,\text{ص} = \text{طا} + \text{طب} + \text{طس}$$

۲ طا تو مساوات کی ہر ایک طرف سے تفریق کرو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$۲\,(\text{ص} - \text{طا}) = \text{طب} + \text{طس} - \text{طا}$$

اور اسیطرح

$$۲\,(\text{ص} - \text{طب}) = \text{طس} + \text{طا} - \text{طب}$$

$$۲\,(\text{ص} - \text{طس}) = \text{طا} + \text{طب} - \text{طس}$$

ان قیمتون کے مندرج کرنے سے ہمکو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$\text{جب}^{۲}\,\text{ا} = \frac{۴\,\text{ص}\,(\text{ص}-\text{طا})\,(\text{ص}-\text{طب})\,(\text{ص}-\text{طس})}{\text{طب}^{۲}\,\text{طس}^{۲}}$$

جب^{۲} ا کی واسطے جو یہہ جملہ ہے اوسکا جذر نکالنے سے اور ایسے ہی جملے جب^{۲} ب اور جب^{۲} س کے لیے دریافت کرنے سے ہمکو یہہ حاصل ہوتا ہے :

$$\left.\begin{aligned}\text{جب ا} &= \frac{۲}{\text{طب طس}}\sqrt{\text{ص}\,(\text{ص}-\text{طا})\,(\text{ص}-\text{طب})\,(\text{ص}-\text{طس})}\\ \text{جب ب} &= \frac{۲}{\text{طس طا}}\sqrt{\text{ص}\,(\text{ص}-\text{طا})\,(\text{ص}-\text{طب})\,(\text{ص}-\text{طس})}\\ \text{جب س} &= \frac{۲}{\text{طا طب}}\sqrt{\text{ص}\,(\text{ص}-\text{طا})\,(\text{ص}-\text{طب})\,(\text{ص}-\text{طس})}\end{aligned}\right\}\quad (۳)$$

(۴) نصف زاویون کے جیب اور جیب التمام اور مماس

اگر ہم اوس جملہ کو جو (۱ + جم ا) کی قیمت کے واسطے دریافت کیا ہے اور ۲ جم^{۲} $\frac{۱}{۲}$ ا کو مساوی لکھین اور بجائے اجزاء ضربی (طا + طب + طس) اور (طب + طس − طا) کے اون کی قیمتین ۲ ص اور ۲ (ص − طا) لکھین تو ہمکو یہہ حاصل ہوگا

$$\text{جم}^{۲}\,\tfrac{۱}{۲}\,\text{ا} = \frac{\text{ص}\,(\text{ص}-\text{طا})}{\text{طب طس}}$$

اس مساوات کا جذر لینے اور اسطرح کے جملے جم $\frac{۱}{۲}$ ب اور جم $\frac{۱}{۲}$ س کے دریافت کرنے سے ہمکو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

جم ½ ا = √(ص (ص − طا) / طب طس)

جم ½ ب = √(ص (ص − طب) / طا طس) (۴)

جم ½ س = √(ص (ص − طس) / طا طس)

اور اسیطرح (ا − جم ا) کی صورت بیانیہ سے ہم کو یہ حاصل ہوتا ہے کہ

جب ½ ا = √((ص − طب) (ص − طس) / طب طس)

جب ½ ب = √((ص − طس) (ص − طا) / طس طا) (۵)

جب ½ س = √((ص − طا) (ص − طب) / طا طب)

اگر ہم (۵) کے اول مساوات کو (۴) کے اول مساوات پر تقسیم کریں تو مس ½ ا کی قیمت اور اسیطرح سے مس ½ ب اور مس ½ س کی یہ دریافت ہونگی ۔

مس ½ ا = √((ص − طب) (ص − طس) / ص (ص − طا))

مس ½ ب = √((ص − طس) (ص − طا) / ص (ص − طب)) (۶)

مس ½ س = √((ص − طا) (ص − طب) / ص (ص − طس))

پانچویں شکل

دعوی مثلث مستوی کا رقبہ برابر ہوتا ہے نصف سطح دو ضلاع اور اون کے زاویہ درمیانی کے جیب کے

بیان دعوی فرض کرو کہ ضلاع طب اور طس ہون اور اونکا درمیانی زاویہ ا ہے

رقبہ = ½ طب طس جب ا

صورت اول

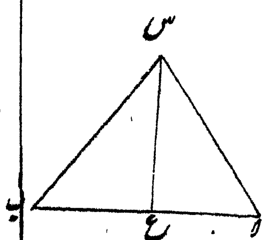
اگر زاویہ درمیانی قائمہ ہو

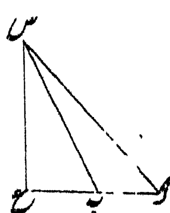
اثبات اس وضع پر تین زاویہ درمیانی کی جیب ایک ہوگی اسلئے اثبات دعوی ظاہر ہے

صورت دوم

اگر زاویۂ درمیانی حادہ ہو

عمل شکل فرض کرو کہ ا زاویہ حادہ ان مثلثوں میں سے ہر ایک میں ہو اور ا ب پر س سے عمود س ع نکالو





اثبات بحکم (اش ۴ م) کے

رقبہ = ½ ا ب × س ع

لیکن ا ب = ط س اور بموجب شکل اول باب سوم کے

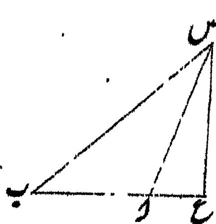
س ع = ط ب جب ا اسیواسطے

رقبہ = ½ ط ب ط س جب ا

صورت سوم

اگر زاویۂ درمیانی منفرجہ

عمل شکل فرض کرو کہ ا زاویۂ منفرجہ اس مثلث میں ہو اور ب ا ممدودہ پر س سے عمود س ع نکالا گیا ہو



اثبات بحکم (اش ۲ م) کے

رقبہ = ½ ا ب × س ع

لیکن ا ب = ط س اور س ع = س ا × حا س ا ع اور س ا ع تکملہ ا کا ہے اسواسطے

س ع = ط ب حا ا اسیواسطے

رقبہ = ½ ط ب ط س جب ا فہو المراد

مثال

معلوم ہے کہ ط ب = ۲۵ فیٹ ط س = ۱۱۷ فیٹ اور ا = ۲۷° رقبہ دریافت کرو

۱۱۷×۳۵ = ۴۰۹۵

جب ۲۷° = ۰٫۴۵۳۹۹

۲) ۱۸۵۹٫۰۸۹۰۵

رقبہ = ۰۹۲۹٫۵۴۴۵۲

اشلہ مشق ۱۲

رقبہ دریافت کرو

(۱) طب = ۱۷٫۲۸ فٹ اور طس = ۲۲٫۳۰۱ فٹ اور ل = ۳۰°

(۲) طب = ۲۲٫۳۲۱ فٹ اور طس = ۷۶ فٹ اور ل = ۹۴°

(۳) طب = ۱۰۰ گز اور طس = ۲ ½ میل اور ل = ۲۴°

یہ صورت شلثی لوکارثم کی آسانی کے لئے اختیار کی گئی ہیں

لوگ (۲ رقبہ) = لوگ طب + لوگ طس + لوگ جب ل − ۱۰

مثال

معلوم ہے کہ طب = ۸۷۶ اور طس = ۱۱۳ اور ل = ۵۷° ۳′ ۲۷″

رقبہ دریافت کرو

لوگ ۸۷۶ = ۲٫۹۴۲۵۰

لوگ ۱۱۳ = ۲٫۰۵۳۰۸

لوگ جب ۵۷° ۳′ = ۹٫۹۲۳۸۴

(تفاوت جدولی = ۸) × ۲۷/۶۰ = ۳

۱۴٫۹۱۹۴۵

۱۰

لوگ (۲ چند رقبہ) = ۴٫۹۱۹۴۵

۲ رقبہ = ۸۳۰۷۲ جواب ۴۱۵۳۶

اشلہ مشق ۱۳

رقبہ دریافت کرو

(۱) معلوم ہی کہ طب = ۵۱۳ اور طس = ۲۲ اور ا = ۹۷°

(۲) طب = ۱۲۷ء۳۱۱ اور طس = ۲۸۹ء۷ اور ا = ۱۲۶°

(۳) طب = ۴۱۳ء۲ اور طس = ۲۵۵ء۷ اور ا = ۴۹° ۴۴′ ۲۰″

(۴) طب = ۷۷ اور طس = ۱۵۹ اور ا = ۵۰° ۳۱′ ۲۸″

(۵) طب = ۲۸۷ء۱ اور طس = ۳۱۰ء۲۵ اور ا = ۱۱۴° ۴۸′ ۳۲″

(۵) اضلاع کی رقموں مین رقبہ مثلث کا دریافت کرو

بموجب آخر شکل کے

$$\text{رقبہ} = \tfrac{1}{2}\,\text{طب طس جب ا}$$

$$\text{جب ا} = \frac{\sqrt{\text{ص (ص - طا) (ص - طب) (ص - طس)}}}{\text{طب طس}}$$

$$\text{اسواسطے رقبہ} = \sqrt{\text{ص (ص - طا) (ص - طب) (ص - طس)}}$$

اس صورت بیانیہ سے ہم مثلث کے تینون ضلعون کے معلوم ہونے سے رقبہ دریافت کرنیکا یہ قاعدہ استنباط کرتے ہین

قاعدہ

اول تینون ضلعون کو جمع کرو اور حاصل جمع کا نصف کرلو

دوم نصف مجموعہ سی ہر ایک ضلع کو جدا جدا تفریق کرو

سوم تینون باقیون اور نصف مجموعۂ اضلاع کو آپس مین ضرب دو

چہارم حاصل ضرب کا جذر نکالو

پس ماحصل رقبۂ مطلوب ہوگا

مثال

معلوم ہے کہ طا = ۱۰۰ اور طب = ۸۶ اور طس = ۷۲ رقبہ دریافت کرو *

۱۰۰
۸۶
۷۲
۲)۲۵۸
۱۲۹
۱۰۰
۲۹

۱۲۹
۸۶
۴۳

۱۲۹
۷۲
۵۷

۹۱۶۹۱۹۱ = ۵۷ × ۴۳ × ۲۹ × ۱۲۹

جذر = ۳۰۲۸ ..

جواب ۳۰۲۸

امثلہ مشق ۱۴

رقبہ دریافت کرو

(۱) معلوم ہے کہ طا = ۱۴،۲۶ اور طب = ۱۹،۲ اور طس = ۳۲

(۲) معلوم ہے کہ طا = ۷۲ اور طب = ۹۴،۱ اور طس = ۲۲،۳

(۳) معلوم ہے کہ طا = ۱۵۳ اور طب = ۹۰۴ اور طس = ۹۸

یہ صورت لوکارثم کے حساب کے واسطے اختیار کی گئی ہے کہ

لوگ رقبہ = $\frac{1}{2}$ {لوگ ص + لوگ (ص − طا) + لوگ (ص − طب) + لوگ (ص − طس)}

مثال

معلوم ہے کہ طا = ۱۷،۲۸ اور طب = ۱۳،۲ اور طس = ۱۴،۶۲ رقبہ دریافت کرو

۱۷،۲۸
۱۳،۲۰
۱۴،۶۲
۲)۴۵،۱۰
۲۲،۵۵
۱۷،۲۸
۵،۲۷

۲۲،۵۵
۱۳،۲۰
۹،۳۵

۲۲،۵۵
۱۴،۶۲
۷،۹۳

لوگ ۲۲ء۵۵ = ۱ء۳۵۳۱۵

لوگ ۵ء۲۷ = ۰ء۷۲۱۸۱

لوگ ۹ء۳۵ = ۰ء۹۷۰۸۱

لوگ ۷ء۹۳ = ۰ء۸۹۹۲۷

۲)۳ء۹۴۵۰۴

لوگ رقبہ = ۱ء۹۷۲۵۲ جواب ۹۳ء۸۶۸

امثلہ مشق ۱۵

رقبہ دریافت کرو

(۱) معلوم ہے کہ طا = ۱۳۱ اور طب = ۲۴۶ اور طس = ۳۲۷

(۲) معلوم ہے کہ طا = ۲ء۰۵ اور طب = ۱ء۶۷ اور طس = ۲ء۷

(۳) معلوم ہے کہ طا = ۱۸۰۰ اور طب = ۱۷۲۸ اور طس = ۱۵۲۱

(۴) معلوم ہے کہ طا = ۲۳ء۰۱ اور طب = ۳۴ء۰۱ اور طس = ۰ء۴۵

(۵) معلوم ہے کہ طا = ۵ء۰۷ اور طب = ۶ء۰۳ اور طس = ۷۲۱

فصل سوم مین جو جملے زاویوں کی جیب کے مجذور کے بیان ہوئے ہین اون سے بھی رقبہ مثلث کا اضلاع کی رقمون مین یہ دریافت ہوگا کہ

رقبہ = $\frac{1}{4}\sqrt{2\,\text{طا}^2\,\text{طب}^2 + 2\,\text{طب}^2\,\text{طس}^2 + 2\,\text{طس}^2\,\text{طا}^2 - \text{طا}^4 - \text{طب}^4 - \text{طس}^4}$

(۶) مثلثات غیر قائم الزاویہ کی پانچ صورتین

مثلث مستوی مین تین ضلعے طا و طب اور طس اور تین زاویے ا اور ب اور س ہوتے ہین اگر ان مقادیر مین سے تین تین معلوم ہون اور اِن تینون مین کوئی تعلق ایسا نہو کہ دو کے معلوم ہونے سے خود بخود تیسرا معلوم ہوجائے تو باقی تین علم ہندسہ کے عمل سے بخوبی دریافت ہوسکتی ہین تین زاویے ا اور ب اور س کے آپس مین بے تعلق نہین ہین کیونکہ مجموعہ اونکا ۱۸۰° ہوتا ہے اور یہ ظاہر ہے کہ بے انتہا مثلث

ایسے بن سکتے ہین کہ جنکے زاویے آپسمین ان زاویوں کی برابر ہوون جنکا مجموعہ ۱۸۰° ہو سوائے ان کے اگر اور کوئی تین ان چھہ مقادیر طا و طب و طس و ا اور ب اور س مین سے معلوم ہون تو باقی تین کا حساب لگ سکتا ہے

اس فصل کا مطلب یہ ہے کہ پانچ مختلف صورتین دو مثلث کے حل کرنے کی بیان کیجاتین اور وہ پانچ صورتین یہ ہین

اول ایک ضلع اور دو زاویے متصل ضلع معلوم کے معلوم ہین

دوم ایک ضلع اور دو زاویے جنمین ایک متصل اور دوسرا مقابل ضلع معلوم کے ہی

سوم دو ضلعے معلوم ہین اور انمین سے ایک ضلع کے مقابل کا زاویہ معلوم ہے

چہارم دو ضلعے اور زاویۂ درمیانی

پنجم تینون ضلعے معلوم ہین

اول صورت

ایک ضلع اور دو زاویے جنمین سے ہر ایک متصل ضلع معلوم کا ہی معلوم ہین

فرض کرو کہ طا ضلع معلوم اور ب اور س دو زاویے معلوم ہون تو

ا = ۱۸۰° − (ب + س) (۱)

بموجب شکل اول طب / طا = جب ب / جب ا

اسیواسطے لوگ طب = لوگ طا + لوگ جب ب − لوگ جب ا (۲)

اور اسیطرح لوگ طس = لوگ طا + لوگ جب س − لوگ جب ا (۳)

اب بوساطت مساوات (۲) اور (۳) کے اضلاع طب اور طس کا حساب ہوتا ہے

مثال

معلوم ہے کہ طا = ۲۱۷ اور ب = ۵۶° ۲۱' ۳۰" اور س = ۶۲° ۱۴' ۲۰"
ا اور طب اور طس کو دریافت کرو

بموجب مساوات (۱)

ا = ۴۰° ۵۷' ۱۰"

طب کے دریافت کرنے کے واسطے مساوات (۲) کے موافق عمل کریں تو یہ حاصل ہوگا

لوگ ۲۱۷ = ۲٫۳۳۶۴۶

لوگ جب ۲۱° ۵۸' = ۹٫۵۹۱۰۳۵

(تفاوت جدول = ۹) × ۳۶/۶۰ = ۴

۱۲٫۲۵۶۸۵

لوگ جب ۴۰° ۵۷' = ۹٫۹۴۱۶۱

۲٫۳۱۵۲۴

× ۷ ۱/۶۰ = ۱

لوگ طب = ۳۱۵۲۳

طب = ۲۰۶٫۶۵

طس کے دریافت کرنے کے لئے ہم مساوات (۳) کے موافق عمل کرتے ہیں

لوگ ۲۱۷ = ۲٫۳۳۶۴۶

لوگ جب ۲۴° ۱۸' = ۹٫۹۴۸۶۵

تفاوت جدولی = ۶) × ۲۰/۶۰ = ۲

۱۲٫۲۸۵۱۳

لوگ جب ۴۰° ۵۷' = ۹٫۹۴۱۶۱

۲٫۳۴۳۵۲

× ۷ ۱/۶۰ = ۱

لوگ طس = ۲٫۳۴۳۵۱

طس = ۲۲۰٫۵۵

جواب ا = ۴۰° ۵۷' ۱۰"

طب = ۲۰۶٫۶۵

طس = ۲۲۰٫۵۵

امثلہ مشق ۱۶

(۱) معلوم ہے کہ طا = ۱۴۳۲٫۸۳ اور ب = ۳۴° ۱۱′ ۲۵″ اور س = ۱۲° ۴۵′ تو ا اور طب اور طس دریافت کرو

(۲) معلوم ہے کہ طا = ۱۲۸٫۷ اور ب = ۷۲° ۳۱′ ۴۰″ اور س = ۱۸° ۳۴′ ۳۰″ ا اور طب اور طس کو دریافت کرو

(۳) معلوم ہے کہ طا = ۵۳۷٫۲۱ اور ب = ۱۷° ۲۳′ ۱۲″ اور س = ۵۲° ۱۸′ ۱۰″ ا اور طب اور طس کو دریافت کرو

(۴) معلوم ہے کہ طا = ۱۰۰۰ اور ب = ۲۰° ۱۵′ ۱۵″ س = ۶۰° ۳۲′ ۱۰″ ا اور طب اور طس کو دریافت کرو

(۵) معلوم ہے کہ طا = ۹٫۷۶ اور ب = ۶۳° ۴۳′ ۲۰″ س = ۲۲° ۱۰′ ۱۵″ ا اور طب اور طس کو دریافت کرو

صورت دوم

ایک ضلع اور دو زاویے معلوم ہیں جنمیں سے ایک ضلع معلوم کے متصل اور دوسرا مقابل ہے - یہ صورت اسطرح پہلی سے بن سکتی ہے کہ ۱۸۰° میں سے دو معلوم زاویوں کی مجموعہ کو تفریق کر کے تیسرا زاویہ دریافت کریں پھر مثلث کو حل موافق پہلی صورت کے کرلیں

صورت سوم

دو ضلعے اور انمیں سے ایک ضلع کا مقابل زاویہ معلوم ہے
فرض کرو کہ اضلاع معلوم طا اور طب ہیں اور زاویہ معلوم ا
بموجب شکل اول کے

(جب ب) / (جب ا) = (طب) / (طا)

سواسطے لوگ جب ب = لوگ جب ا + لوگ طب − لوگ طا (۱)

اس مساوات سے زاویہ ب کا حساب ہوجائے گا

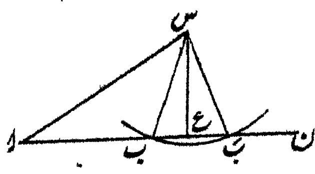
$$س = ۱۸۰^\circ - (ا + ب) \qquad (۲)$$

اور طس کا حساب موافق مساوات (۳) صورت اول کے ہوجائے گا

اس صورت کو صورت مشتبہ کہتے ہیں اسواسطے کہ جب زاویہ معلوم حادّہ ہو تو اکثر مثلث کے دو حل ہونگے ؀

مساوات (۱) سے قیمت لوگ جب ب کی دریافت کرتے ہین لیکن جیب زاویے اور اور اوسکے تکملے کی آپسمین برابر ہوتے ہین (بموجب مساوات ۴۲ باب دوم کے) اس سے یہ مستنبط ہوا کہ لوگ جب ب کی جدولی قیمت سے دو زاویئے دریافت ہونگے جنکا مجموعہ ۱۸۰° ہوگا

اس صورت کے مشتبہ ہونے کی وجہ مثلث بنانے سے موافق علم ہندسہ کے بہی اس طرح ثابت ہوتی ہی کہ



فرض کرو زاویہ معلوم ا حادّہ ہے ایک خط ا ن غیر محدود کہیچو اور زاویہ س ا ن کا برابر زاویہ معلوم کے اس سے بناؤ اور ا س برابر ایک ضلع معلوم کے بناؤ اور س کے مرکز اور دوسرے ضلع کے برابر نصف قطر لیکر دائرہ کہیچو جو اکثر ا ن کو دو نقطوں ب اور بَ پر قطع کرے گا اب یہ بدیہی بات ہے کہ دو مثلث ا ب س اور ا س بَ موافق معطیات معلوم کے سب طرح سے بن گئے ؀

مثلث ب س بَ متساوی الساقین ہے اسواسطے زاویہ س ب بَ برابر ہے زاویہ س بَ ب کے اور س ب بَ تکملہ زاویہ س ب ا کا ہے اس سے

یہ مستنبط ہوتا ہے کہ زاویئے ا ب س اور ا ب' س جو دونوں مثلثوں مین مقابل ضلع طب کے ہین باہم ایک دوسرے تکملے ہین اور اسیواسطے اونکی ایک ہی جیب ہے

اگر طا کم طب جیب ا سے ہو تو یہ صورت ناممکن ہوگی یعنے مثلث کا بنا ناممکن ہوگا دلیل اسکی یہ ہے کہ اگر س ع عمود ا ب پر نکالین تو س ع = طب جیب ب بحکم شکل اول باب سوم کے پس جب س کے مرکز اور س ع سے کم نصف قطر پر دائرہ کھیچین تو وہ خط ا ن سے ہرگز نہین ملے گا اسلئے مثلث نہین بنے گا ؛

اگر طا = طب جیب ا اس صورت مین مثلث کا ایک ہی حل ہوگا یعنے مثلث قائم الزاویہ ا س ع ہوگا

اگر طا بڑا طب جیب ا سے ہو اور طا چھوٹا طب سے ہو تو مثلث کے ایسے دو حل ہونگے جنکا اوپر ذکر ہوا +

اگر طا بڑا طب سے ہو تو فقط ایک ہی حل ہوگا کیونکہ نقطۂ تقاطع ب جو بائین طرف ا کے واقع ہوگا اس صورت مین ترک کیا جائے گا اسواسطے ہم قیمت ب کی ایسی منتخب کر سکتے ہین کہ زاویۂ ب حادہ ہو

اگر زاویۂ معلوم ا منفرجہ ہو تو اسطرح شکل بنا کر ہم یہ دیکھہ سکتے ہین کہ فقط ایک صورت قابل حل کے ہے جسمین طا بڑا طب سے ہو اس صورت مین بھی ہمکو زاویہ ب کی ایسی قیمت منتخب کرنی چاہیئے جو زاویۂ حادہ کے واسطے قیمت ہو

مثالین

(۱) معلوم ہے کہ طب = ۱۵۶ اور طا = ۱۳۰ اور ا = ۲۰° ۲۵′ ب اور س اور طا دریافت کرو ؛

لوگ جیب ۲۰° ۲۵′ = ۹٫۵۴۲۸۹۹۰

لوگ ۱۵۶ = ۲٫۱۹۳۱۲۵

۱۱٫۷۳۶۰۲۳

لوگ ۱۳۰ = ۲٫۱۱۳۹۴۳

۹٫۶۲۲۰۸۰

جدول کی قیمت ب کی جو لوگ جب ب کی قیمت کی مطابق ہوتی ہے ۵۴ ۲ ۲۰ ہے
اور جو کچھ اوپر ہم نے لکھا ہے اوسکی موافق تکملہ اس زاویہ کا یعنی ۱۲۵ ۵۷ ۴۰
بہی وہی قیمت لوگ جب کی رکھتا ہے اسیواسطے دو قیمتیں ب کی یعنے

ب = ۵۴ ۲ ۲۰

ب = ۱۲۵ ۵۷ ۴۰

اور اس کے مطابق دو قیمتین س کے دریافت ہوتی ہین

س = ۸۳ ۳۲ ۴۰

س = ۱۱ ۲۷ ۲۰

اور وہی قیمتین طس کی بہ تفصیل ذیل

طس = ۱۹۱٫۵۰

طس = ۳۱٫۸۳

(۲) معلوم ہے کہ طب = ۳۱ اور طا = ۳۸ اور ا = ۵۳ ۲۰ ۶ قیمت ب اور
طس اور طا کی دریافت کرو

لوگ ۵۳ ۲۰ ۶ = ۹٫۹۰۴۲۴

۱۰ + ۱ = ۱۰

لوگ ۳۱ = ۱٫۴۹۱۳۶
۱۱٫۳۹۵۶۱
لوگ ۳۸ = ۱٫۵۷۹۷۸

لوگ جب ب = ۹٫۸۱۵۸۲

لوگ جب ب کی قیمت اسکے مطابق ۴۰ ۵۲ ۱۲ ہے اور تکملہ اس کا
۱۳۹ ۷ ۴۸ یہ قیمت حل کے اندر داخل نہیں رکھتے کیونکہ اس صورت میں
طا بڑا طب سے ہے س کا حساب مساوات (۲) سے کرو اور طب بموجب مثلثات (۳)

مثلثات غیر قائم الزاویہ

صورت (ا) کے دریافت کرو

جواب ب = ۴۰° ۵۲′ ۲۱″

س = ۸۵° ۴۷′ ۳۳″

طس = ۴۲۴۲،۴۷

امثلہ مشق ۱۷

(۱) معلوم ہے کہ طب = ۵۳ اور طا = ۴۷ اور ا = ۳۶° ۴۲′ ۳۰″
ب (حادہ) اور س اور طس کو دریافت کرو

(۲) معلوم ہے کہ طب = ۳۱۲ اور طا = ۵۱۷ اور ا = ۱۲۴° ۳۲′
ب اور س اور طس دریافت کرو

(۳) معلوم ہے کہ طب = ۲۱۷ اور طا = ۱۹۹ اور ا = ۶۲° ۲۴′ ۲۰″
ب (منفرجہ) اور س اور طس کو دریافت کرو

(۴) معلوم ہے کہ طب = ۸۰۰۳ اور طا = ۶۲۱۷۳ اور ا = ۱۰۷° ۰۳′ ۱۳″
ب اور س اور طس کو دریافت کرو

(۵) معلوم ہے کہ طب = ۱۰۰ اور طا = ۶۲ اور ا = ۸۳° ۹′
ب اور س اور طس کو دریافت کرو

صورت چہارم

دو ضلعے اور اونکا درمیانی زاویہ معلوم ہے

فرض کرو کہ طا اور طب اور اونکا درمیانی زاویہ س معلوم ہے تو

$$\frac{1}{2}(ا + ب) = 90° - \frac{1}{2} س \qquad (1)$$

بحکم شکل دوم کے طا+طب : طا−طب :: مس $\frac{1}{2}$(ا+ب) : مس $\frac{1}{2}$ (ا − ب)

اسی لئے لوگ مس $\frac{1}{2}$ (ا − ب) = لوگ (طا − طب) + لوگ مس $\frac{1}{2}$ (ا + ب) − لوگ (طا + طب) (۲)

(۱) اور (۲) مساواتوں کے ذریعہ سے ہم ½ (ا + ب) اور ½ (ا − ب) کی قیمتوں کا حساب لگا سکتے ہیں اور ان قیمتوں کی جمع اور تفریق سے ا اور ب کی قیمتیں دریافت کرسکتے ہیں :

بموجب ۳ شکل ۲ باب کے

طس : طا − طب :: جیب ½ (ا + ب) : جیب ½ (ا − ب)

اس سے لوگ طس = لوگ (طا − طب) + لوگ جیب ½ (ا + ب) − لوگ جیب ½ (ا − ب) (۳)

اس مساوات سے طس کا حساب مثال ذیل میں کرتے ہیں

مثال

معلوم ہے کہ طا = ۲۱۸ اور طب = ۱۵۶ اور س = ۳۸° ۲۱′ ۲۰″
ا اور ب اور طس کی قیمت دریافت کرو

۲۱۸ ، ۱۵۶ ، ۶۲ ، ۳۷۴

۱۸۰° − ۳۸° ۲۱′ ۲۰″ = ۱۴۱° ۳۸′ ۴۰″ ÷ ۲

مجموعہ = ۳۷۴

تفاوت = ۶۲ ½ (ا + ب) = ۷۰° ۴۹′ ۲۰″

لوگ مس ½ (ا + ب) = ۱۰.۴۵۸۴۶ = لوگ جیب ½ (ا + ب) = ۹.۹۷۵۲۰

لوگ ۶۲ = ۱.۷۹۲۳۹ ، لوگ ۶۲ = ۱.۷۹۲۳۹

۱۲.۲۵۱۰۶ ، ۱۱.۷۶۷۵۹

لوگ ۳۷۴ = ۲.۵۷۲۸۷ ، لوگ جیب ½ (ا − ب) = ۹.۶۳۳۷۴

لوگ مس ½ (ا − ب) = ۹.۶۷۸۱۹ ، لوگ طس = ۲.۱۲۳۸۵

طس = ۱۳۲.۶۱۱

½ (ا − ب) = ۲۵° ۲۹′ ۴۴″
½ (ا + ب) = ۷۰° ۴۹′ ۲۰″

ا = ۹۶° ۱۸′ ۴۴″
ب = ۴۵° ۲۰′ ۲۴″

امثلہ مشق ۱۹

(۱) معلوم ہے کہ طا = ۵۱۶ اور طب = ۲۱۹ اور س = ۹۸° ۳۶′ ۰۶″
ا اور ب اور طس کو دریافت کرو

(۲) طا = ۴۲۳۵۴ طب = ۱۳۱۲۷ اور س = ۱۲۶° ۳۶′ ۶″ ا اور ب اور طس کو دریافت کرو

(۳) معلوم ہے کہ طا = ۱۳۱۸۱ اور طب = ۵۳۶ اور س = ۱۶° ۴۸′ ۴۰″
ا اور ب اور طس کو دریافت کرو

(۴) معلوم ہے کہ طا = ۱۴۸۲ اور طب = ۳۲۷۳۲ اور س = ۱۶° ۵۳′
ا اور ب اور طس کو دریافت

(۵) معلوم ہے کہ طا = ۱۷۳ اور طب = ۱۲۳ اور س = ۴۲° ۱۳′ ۳۰″
ا اور ب اور طس کو دریافت کرو

صورت پنجم

تینوں ضلعے معلوم ہیں

سب سے زیادہ آسان صورت حل کی ان قوانین سے جو در باب نصف زاویہ کے مماس کے بیان ہوئے ہیں پیدا ہوسکتی ہے اور وہ یہ ہے کہ

$$\text{مس}\ \tfrac{1}{2}\ ا = \sqrt{\frac{(\text{ص}-\text{طب})(\text{ص}-\text{طس})}{\text{ص}(\text{ص}-\text{طا})}}$$

ص − طا سے اوپر اور نیچے ضرب دو تو

$$\text{مس}\ \tfrac{1}{2}\ ا = \frac{1}{\text{ص}-\text{طا}}\sqrt{\frac{(\text{ص}-\text{طا})(\text{ص}-\text{طب})(\text{ص}-\text{طس})}{\text{ص}}}$$

جذر کے ماتحت جو جملہ ہے وہ برابر اوس دائرہ کے نصف قطر کے ہے جو مثلث میں بنایا جائے (اقلیدس مقالہ چہارم نتیجہ شکل ۴ کے) اس نصف قطر کو ن سے تعبیر کرو تو

$$\text{مس}\ \tfrac{1}{2}\ ا = \frac{\text{ن}}{\text{ص}-\text{طا}}$$

$$\text{مس}\ \tfrac{1}{2}\ ب = \frac{\text{ن}}{\text{ص}-\text{طب}}$$

مس ½ س = نق ÷ (ص − طس)

مساواتوں کی ہر ایک طرف کا لوکارثم لو تو

لوگ مس ½ ا = ۱۰ + لوگ نق − لوگ (ص − طا)

لوگ مس ½ ب = ۱۰ + لوگ نق − لوگ (ص − طب)

لوگ مس ½ س = ۱۰ + لوگ نق − لوگ (ص − طس)

مثال

معلوم ہے کہ طا = ۲۶ اور طب = ۳۱ اور طس = ۴۳ تو ا اور ب اور س کو دریافت کرو

طا = ۲۶

طب = ۳۱

طس = ۴۳

۲)۱۰۰

ص = ۵۰   ۵۰   ۵۰

ص − طا = ۲۴ ÷ ۲۶   ص − طب = ۱۹ ÷ ۳۱   ص − طس = ۷ ÷ ۴۳

لوگ ۲۴ = ۱٫۳۸۰۲۱

لوگ ۱۹ = ۱٫۲۷۸۷۵

لوگ ۷ = ۰٫۸۴۵۱۰

۳٫۵۰۴۰۶

لوگ ۵۰ = ۱٫۶۹۸۹۷

لوگ نق = ۰٫۹۰۲۵۵

۱۰٫۹۰۲۵۵	۱۰٫۹۰۲۵۵	۱۰٫۹۰۲۵۵
۱٫۳۸۰۲۱	۱٫۲۷۸۷۵	۰٫۸۴۵۱۰
لوگ مس ½ ا = ۹٫۵۲۲۳۴	لوگ مس ½ ب = ۹٫۶۲۳۸۰	لوگ مس ½ س = ۱۰٫۰۵۷۴۵

½ ا = ۱۸° ۲۴′ ۴۸″   ½ ب = ۲۲° ۴۸′ ۳۰″   ½ س = ۴۸° ۴۹′ ۳۶″

ا = ۳۶° ۴۹′ ۳۶″   ب = ۴۵° ۳۷′ ۰″   س = ۹۷° ۳۳′ ۲۴″

امثلہ مشق ۱۹

(۱) معلوم ہے کہ طا = ۱۵،۳۲ اور طب = ۲۱،۵۶ اور طس = ۱۶،۲۲ زاویئے دریافت کرو

(۲) معلوم ہے کہ طا = ۲،۱۳۴ اور طب = ۱۶،۱۷ اور طس = ۸۱۵ زاویئے دریافت کرو

(۳) معلوم ہے کہ طا = ۱۰۰ اور طب = ۱۳،۴۲ اور طس = ۱۱۱۰ زاویئے دریافت کرو

(۴) معلوم ہے کہ طا = ۱ اور طب = ۱،۳۲ اور طس = ۰،۷۵ زاویئے دریافت کرو

(۵) معلوم ہے کہ طا = ۱۲،۷ اور طب = ۳۲ اور طس = ۹ زاویئے دریافت کرو

باب ہفتم

ارتفاع اور فاصلے

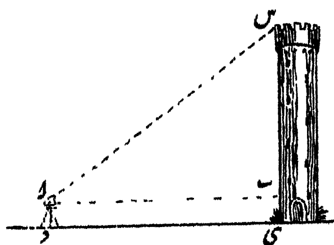
قائم الزاویہ اور غیر قائم الزاویہ مثلثون کے حل کرنیکے جو قاعدے بیان ہوئے ہین اونکی وساطت اور ذریعہ سے مساحِ برّی اور بحری اور نقشے بنانے والے اون ارتفاعون اور فاصلون کا حساب لگا سکتے ہین جہان اونکی رسائی نہین ہو سکتی ملک کے ملک اور سمندر کے سمندر فقط ایک خط کے ناپنے سے اور باقی زاویون کی پیمایش سے نپ جاتے ہین اور اون کے کہیچے چربے اوترائے ہین اور نقشہ کہیچ جاتے ہین یہ خط جو ناپا جاتا ہے اوسکو قاعدہ کا خط کہتے ہین اور فقط اس خط کا طول ہی ہاتہون سے ناپتے ہین اور باقی کام زاویونکی پیمائش ہی کر چلاتے ہین غرض اس معاملہ کی جو بڑی بڑی باتین ہین اونکو سوالات کی صورتمین بیان کرتے ہیں

پہلا سوال

ایک سطح افقی پر ایک شے ہے اور اوس تک ہم نہین پہونچ سکتے اوسکا ارتفاع دریافت کرو اگر ا دیکہنے والے کی آنکہہ کا مقام ہو اور ا ب = د ی کے ہو اور د ی فاصلہ افقی اوس شے کا ہو اور زاویۂ ب ا س زاویۂ ارتفاع ہو تو یہ ظاہر ہے کہ ارتفاع ب س کا حساب مثلث قائم الزاویہ ب ا س سے ہو سکتا ہے اور جب ارتفاع معلوم ہو تو اوس ب س ـ ا د کے زیادہ کرین اور دیکہنے والے کی آنکہہ کا ارتفاع افق سے یا سطح ہمکو

ہمکو ارتفاع مطلوب اوس سمتے کا دریافت ہو جائے گا ؀

امثلہ مشق ۲۰

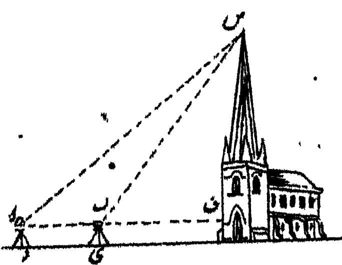


(۱) ایک آدمی کی آنکھ ۵ فیٹ ۶ انچ سطح زمین سے اونچی ہے وہ ۱۲۵ فیٹ برج کے قاعدہ سے پرے ہٹا تو زاویۂ ارتفاع ۵۲° ۳۴′ بنا اوسکا ارتفاع دریافت کرو ؀

(۲) ایک خندق ۴۲ فیٹ چوڑی ہے اوسکے کنارہ پر سے دیکھا تو زاویۂ ارتفاع قلعہ کی دیوار کا ۴۹° ۱۲۸ بنا تو بتاؤ دیوار کتنی بلند ہے اور میری آنکھ کا ارتفاع ۵ فیٹ ہے ؀

سوال دوسرا

سطح افقی سے ارتفاع اور فاصلہ کسی شی کا جس تک ہم پہونچ نہین سکتے دریافت کرو ؀



فرض کرو کہ ا اور ب دو مقام دیکھنے والے کی آنکھ کے ہین اور فاصلہ اب = دی اور دی کی ہم نے پیمائش کر لی ہے اگر زاویۂ ارتفاع ف ا س = ا اور ف ب س = ب کے بھی دیکھے جائین اور پیمائیش کئے جائین تو اوس شے کے ارتفاع اور فاصلہ کا حساب ہو سکتا ہے

اسواسطے کہ مثلثات ا ب س مین طول ضلع ب س کا موافق صورت اول مثلث غیر قائم الزاویہ کے دریافت ہو سکتا ہے اور مثلث ف ب س کے اضلاع ف س اور ف ب کا حساب موافق صورت چہارم مثلثات قائم الزاویہ کے ہو سکتا ہے ۔ مشاہدہ کرنے والے کے مقام سے فاصلہ ضلع ف ب ہے اور اگر ف س اپر ارتفاع مشاہدہ کرنی والے کی آنکھ کا

زیادہ کرین تو اوس شئے کا ارتفاع معلوم ہوجائے گا

ف س = ا ب × جب ا جب ب / جب (ب − ا)

ف ب = ا ب × جب ا جم ب / جب (ب − ا)

امثلۂ مشق ۲۱

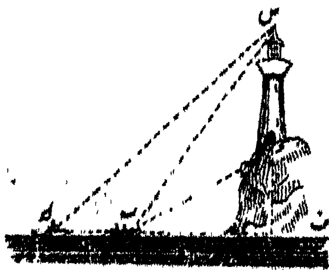
(۱) ایک گرجا کی مینار کا ارتفاع دریافت کرنا منظور تھا مین نے دو مقام ایک خط پر ۵۲ گز کے فاصلہ پر مقرر کئے اور اون مقامات پر زاویئے ارتفاع ۱۸° ۵۴′ اور ۳۶° ۲۴′ پیمائش مین آئے اور میری آنکہ زمین سے ۴ فیٹ ۶ انچ بلند تھی تو بتاؤ مینار کا ارتفاع کیا ہے؟

(۲) اوس مینار کا ارتفاع دریافت کرو جسکی جڑ سے زاویۂ ارتفاع ۵۲° ہے اور جب اوسکی جڑ سے ۳۰۰ گز سطح افقی پر پیمائش کرکے پرے ہٹا تو زاویۂ ارتفاع ۴۸° ۳۰′ معلوم ہوا؟

تیسرا سوال

ایک شے سطح افقی سے بلند ہے اور اس بلندی پر ایک اور شئے اونچی واقع ہے اور وہان تک ہمارا گذر نہین ہوسکتا سطح افقی سے اوسکی بلندی دریافت کرو

فرض کرو کہ ا اور ب دو مقام اوسی شئے کے ساتھ ہیں ہون اور اونہین جو فاصلہ باہم ہو وہ ناپا جائے اور اول مقام سے جو چوٹی کا زاویۂ ارتفاع پیمائش کیا جائے وہ = ا کے ہو اور دوسرے مقام سے چوٹی اور جڑ کے ارتفاع کے زاویے پیمائش کئے جاہین برابر ب اور ی کے ہون سطح افقی سے ارتفاع ف س کا حساب



موافق سوال دوم کے ہو سکتا ہے اور د ف برابر ہے ب ی × مس ی کے اور
د ف س وہ بلندی ہے جسپر وہ شے مرتفع واقع ہے اگر د ف کو ف س مین سے
نکال ڈالین تو باقی ارتفاع مطلوب اوسکا رہے گا ؎

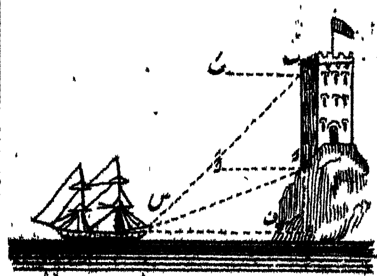
امثلۂ مشق ۲۲

(۱) ایک قلعہ پہاڑ پر واقع تہا سمندر مین وہ دو مقامون سے ایک سیدہ مین ایک شے
کے ساتہہ دکہائی دیا ان دونون مقامون مین فاصلہ ایک چوتہائی میل تہا
اور قلعہ کی چوٹی کا زاویۂ ارتفاع فاصلۂ بعید سے ۱۶° ۲۸′ ہے اور چوٹی اور
جڑ کے ارتفاع کے زاویئے ۲۵° ۱۴′ اور ۸۴° ۳۸′ ہین تو بتاؤ اوسکا
ارتفاع کیا ہے اور سمندر سے وہ کتنا اونچا ہے ؎

(۲) مجہے ایک مکان کے دروازہ کا ارتفاع دریافت کرنا تہا اور مین وہان تک
جا نہین سکتا تہا مین نے اوسکے سامنے دو مقام جنمین ۴۰ فیٹ کا فاصلہ تہا تجویز
کئے مقام ابعد پر زاویۂ ارتفاع دروازہ کے سرون کا ۳۱° ۳۰′ تہا اور مقام
اقرب پر زاویۂ ارتفاع ۸۴° اور ۳۶° ۳۰′ تہا تو دروازہ کا ارتفاع اور اوسکی
بلندی زمین سے دریافت کرو ؎

چوتھا سوال

سطح افقی پر دو بلند مقامون سے ایک
شے کا مشاہدہ کیا گیا تو اوس شے کا فاصلہ
دریافت کرو ؎



فرض کرو کہ مقامات مشاہدہ کے ا اور ب
ایک خط راسی مین ہون اور اوسکے دریا کا
فاصلہ معلوم ہو اور ب ا ب اور ا ا

افقی خطوط ہین اور زاویئے لپستی ب ب ا اور ا اس او س شے کے مشاہدے کے فاصلہ ف س کا حساب مثلث ا ب س سے ہوسکتا ہے اسواسطے کہ زاویئے ف ب س اور ف ا س تمامیان زوایا لپستی کی ہین اور اسیواسطے وہ معلوم ہین اور ضلع ا س کا حساب بموجب صورت اول مثلثات غیر قائم الزاویہ کے ہوسکتا ہے اگر زاویئے لپستی د اور دُ ہون اور ارتفاع ا ب = صہ تو فاصلہ ف س کا اسطرح دریافت ہوسکتا ہے ؛

$$\text{فاصلہ ف س} = \text{صہ} \times \frac{\text{جم د جم دُ}}{\text{جب (د − دُ)}}$$

$$\text{ارتفاع ا ف} = \text{ھہ} \times \frac{\text{جم د جب دُ}}{\text{جب (د − دُ)}}$$

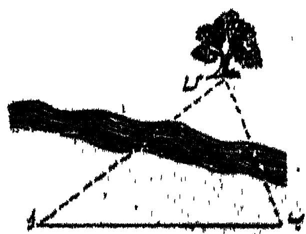
امثلہ مشق ۲۳

(۱) ایک مکان کی ممٹی سے اور ایک دروازہ سے جو ۳۰ فیٹ نیچے ممٹی سے تھا ہین زوایا ئ لپستی ایک شے کی ۱۵° ۴۰' اور ۱۰° دیکھے تو بتاؤ فاصلہ اوس شے کا کتنا ہے اور ارتفاع مکان کا کیا ہے ؛

(۲) ایک قلعہ ۸۰ فیٹ بلند ہے اوسکی منڈیر پرسے اور جڑ سے کسی شے کی زوایائ لپستی ۱۶° ۲۸' اور ۱۳° ۲۱' مشاہدہ مین آئی فاصلہ گزون مین دریافت کرو ؛

پانچوان سوال

ایک شے کی پاس ہم نہین جاسکتے اوسکا فاصلہ سطح افقی پر دریافت کرو ؛

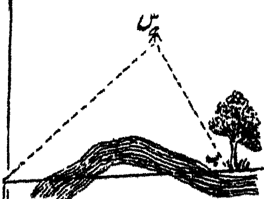


فرض کرو کہ س کوئی شے ہے اور ا کوئی مقام مشاہدہ کا ہے اور ایک فاصلہ ناپ کر دوسرا مقام ب مقرر کرو اور ان مقامون سے زاویون س ا ب اور س ب ا کی پیمایش کرو

توبموجب صورت اول مثلث غیر قائم الزاویہ کے فاصلۂ اس کو دریافت کرسکتے ہین
اگر نقطۂ ب ایسا مقرر کیا جائے کہ زاویہ ا پر قائمہ ہو تو اس کا حساب بموجب صورت سوم
مثلثات قائم الزاویہ کے ہوسکتا ہے ؛

چھٹا سوال

سطح افقی پر دو اشیا کا فاصلہ دریافت کرو اور ہم
ایک شئے سے دوسری شئے کے پاس ہنین جاسکتے ؛



فرض کرو کہ ا اور ب دو شئے ہون کوئی مقام س کا
ایسا مقرر کرو جہان آسانی عمل مین ہو اور زاویۂ
اس ب کو ناپو اور فاصلے اس اور ب س بھی ناپو
توبموجب صورت چہارم مثلثات غیر قائم الزاویہ کے اب کا حساب ہوسکتا ہے ؛

امثلۂ مشق ۲۵

(۱) اگر شکل مین فاصلے اس اور ب س ۳۰۰ اور ۴۵۰ گز ہون اور زاویہ س
۵۸° ۲۰' ۳۰" تو بتاؤ جھنڈی سے درخت کا فاصلہ کتنا ہوگا ؛

(۲) ایک قلعہ محصور ہے اوسمین دو چیزین ایک مقام پر دکھائی دین اور اونکے فاصلے کے
محاذی زاویہ ۴۹° ۲۵' اوس مقام پر بنتا ہے اور اوس مقام سے جُدا جُدا فاصلے
اون اشیاء کے ۱۰۲۰ اور ۱۶۸۰ گز ہین تو بتاؤ اون اشیاء مین کیا فاصلہ ہے ؛

اگر فاصلہ اب کا حساب مثلثات غیر قائم الزاویہ کی صورت چہارم کے موافق کرین
تو ضرور ہے کہ اول زاویون س اب اور س ب ا کا حساب لگائین تو فاصلہ
حساب باستعانت ایسی صورت علم مثلثی کے ہوسکتا ہے کہ جنمین لوگارثم کی اعانت
سے آسانی ہو اور زاویون کا جھگڑا ہی بیچ مین نہ آئے
فرض کرو کہ اضلاع ب س اور اس اور اب کے طا اور طب اور طس ہین اور

زاویہ اس ب کا س ہے تو بموجب صورت علم مثلثی (۱) باب چہارم کے

$$طس^2 = طا^2 + طب^2 - ۲\ طا\ طب\ جم\ س$$

جم س کی جگہ اوسکی قیمت $۲\ جم^2 \frac{1}{2} س - ۱$ رکھو تو

$$طس^2 = طا^2 + طب^2 - ۲\ طا\ طب\ (۲\ جم^2 \frac{1}{2} س - ۱)$$

$$طس^2 = (طا + طب)^2 - ۴\ طا\ طب\ جم^2 \frac{1}{2} س$$

$$طس^2 = (طا + طب)^2 \left(۱ - \frac{۴\ طا\ طب\ جم^2 \frac{1}{2} س}{(طا + طب)^2}\right)$$

اگر ہم صہ ایسا زاویہ فرض کرین کہ

$$جم^2\ صہ = \frac{۴\ طا\ طب\ جم^2 \frac{1}{2} س}{(طا + طب)^2}$$

تو $طس = (طا + طب)\ جب\ صہ$

اس صورت پر لوکارثم کا عمل بخوبی ہوتا ہے اور اس مساوات پر بہی کہ

$$جم^2\ صہ = \frac{۴\ طا\ طب\ جم^2 \frac{1}{2} س}{(طا + طب)^2}$$

اس سے زاویۂ مستعان کا حساب ہو سکتا ہے

امثلہ مشق ۲۶

(۱) دو ٹیلو نکے درمیان فاصلہ دریافت کرنا تہا مین نے ہر ایک کا فاصلہ ایک مقام سے ناپا تو وہ ۲ میل ۵۰۰ گز اور ۳ میل ۸۸ گز تہا اور اوس مقام پر زاویہ محاذی اُن دونوں کے ۵۴° ۲ ۴۲′ ۴۰″ تہا بتاؤ اونکے درمیان کیا فاصلہ تہا ؛

(۲) دو مکان ایسے ہین کہ ایک مکان سے دوسرا مکان نہین دکہائی دیتا اور نہ ایک مکان سے دوسرے مکان تک رستہ جانے کا ہے مین نے اونکا فاصلہ ایک مقام سے پیمائش کیا اور وہاں سے دونو مکان نظر آتے ہیے ایک مکان کا فاصلہ ۱۶٫۳۰ جریب اور دوسرے مکان کا فاصلہ ۰۰۴۳٫۰۳ جریب ہے اور زاویہ جو اونکے باہمی فاصلہ کا محاذی ہے ۴۲° ۲۸′ کا ہے اونکے درمیانی فاصلہ گزون مین دریافت کرو ؛

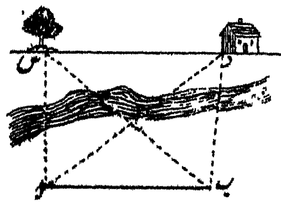
ضلع طس کا حساب اس صورت قانونی سے بہی ہو سکتا ہے کہ

طس۲ = (طا - طب)۲ + ۴ طا طب جب۲ ½ س

اور اس مین کچھہ ضرورت زاویۂ مستعان کی نہین پڑتی اور لوکارثمون کا مجموعہ اور تفاوت جو لکہا ہے اوس سے حساب اونکا ہو سکتا ہے جدول لوکارثمی دیکھو

ساتوان سوال

دو مقامونکے درمیان فاصلہ سطح افقی پر دریافت کرو اور اون دونون مقامونتک ہم نہین پہونچ سکتے - فرض کرو کہ س اور د دو چیزین ہون قاعدہ کا خط ا سے ب تک پیمایش کرو اور اوس کے انجامون



ا اور ب سے زاویۂ ب ا س اور ب ا د اور ا ب د اور ا ب س کو پیمایش کرو تو بموجب صورت اول مثلثات غیر قائم الزاویہ کے اضلاع ا س اور ا د کا حساب ہو سکتا ہے اور پہر اضلاع ا س اور ا د اور زاویۂ درمیانی س ا د سے فاصلہ مطلوب س د کا حساب بموجب صورت چہارم مثلثات غیر قائم الزاویہ کے ہو سکتا ہے ؞

امثلہ مشق ۲۷

(۱) فرض کرو کہ ا ب = ۱۰۰۰ گز اور زاویے ب ا س اور ب ا د = ۷۶° ۳۰' اور ۴۹° ۱۰' اور زاویے ا ب د اور ا ب س = ۸۱° ۱۲' اور ۴۲° ۵' کہ س اور د کی درمیان فاصلہ دریافت کرو

(۲) دشمن نے جو فصیل بنائی تہی اوسکے دو کنگورون کے درمیان فاصلہ دریافت کرنا تہا قاعدہ کا خط ۵۰۰ ناپا اور ہر کنگورہ جو قاعدہ کے ایک انجام پر زاویہ بناتا ہے ۱۸° ۱' ۲۰" اور ۴۶° ۱۴' تہا اور دوسرے انجام پر ۸۸° ۴۹' اور ۳۴° ۱۲' بناتا تہا تو بتاؤ اونکے درمیان کتنا فاصلہ تہا

اٹھوان سوال

دو چیزونکے درمیان فاصلہ معلوم ہے اور دو مقامون سے جو بہت فاصلہ پر ہے اون اشیا کا مشاہدہ کیا گیا تو اون مقامونکے مابین کا فاصلہ دریافت کرو۔

یہہ سوال پہلے سوال سے بالعکس ہے اور اس طرح حل ہوتا ہے ؛

فرض کرو کہ زاویئے ب ا س اور ب ا د اور ا ب د اور ا ب س مشاہدہ ہوکر پیمائش کئے گئے اور ا ب = ١٠٠٠ تو موافق ساتوین سوال کے س ب د کا حساب کرو اور ا ب کا حساب اس تناسب سے کرو

س د (جسکا حساب کیا گیا ہے) : س د (معلوم) :: ١٠٠٠ : ا ب مطلوب

امثلہ مشق ٢٨

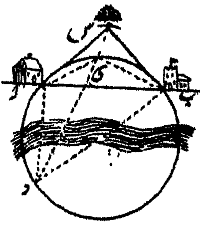
(١) فرض کرو کہ س د ایک میل ہے اور زاویئے ب ا س اور ب ا د اور ا ب د اور ا ب س وہی ہین جو مثال اول سوال ہفتم مین ہتے ا ب کا فاصلہ دریافت کرو۔

(٢) ساحل کی پیمائش مین سمندر کے اندر دو پہاڑون ا اور ب سے ایک روشنی گھر اور دوسرے ٹیلہ کا مشاہدہ کیا گیا اون دونون کے درمیان فاصلہ ٥ ٨ ٢ گز کا تہا اور ا پر روشنی گھر ٨ ؂ ٣٢ اور ٹیلہ ؂٢ ٤٤ کا زاویہ ہر ایک سے بناتا تہا اور ب پر ٹیلہ ؂٥ ١٥ کا اور روشنی ؂٨ ٤٢ کا ا سے زاویہ بناتا تہا پہاڑونکے درمیان فاصلہ اور زاویئے روشنی گھر اور ٹیلہ سی دریافت کرو ؛

نوان سوال

سطح افقی مین تین نقطون کے درمیانی فاصلے معلوم ہین اوسی سطح مین ایک چوتہے نقطے سے اونکے فاصلے دریافت کرو ۔ فرض کرو کہ ا اور ب اور س تین نقطے ہین اور اونکے درمیانی فاصلے معلوم ہین اور د ایک نقطہ ہے جس سے زاویئے ا د س اور ب د س پیمائش کئے نقاط ا اور ب سے گذرتا ہوا دائرہ کہینچو اور فرض کرو کہ خط

س د کو نقطۂ ی پر تقاطع کرتا ہے اور خطوط
ا ی اور ب ی ملائے ہین اب چونکہ زاویئے
ب ا ی اور ا ب ی اہنین قطعون مین
واقع ہین جنمین زاویئے پیمایش کئے گئے
ب د س اور ا د س واقع ہین اسکے
سبب سے وہ زاویے بہی معلوم ہین اور



اسیواسطے اضلاع ا ی اور ب ی کا حساب بموجب صورت اول مثلثات غیر قایم الزاویہ کے ہوسکتا ہے اور مثلث ا ب س کے زاویون کا حساب تین اضلاع معلوم سے بموجب صورت پنجم مثلثات غیر قایم الزاویہ کے ہوسکتا ہے
زاویۂ ب ا س مین سے ب ا ی کو تفریق کرکے زاویۂ ی ا س دریافت کرسکتے ہین اور مثلث ی ا س مین اضلاع ا س اور ا ی اور اونکا درمیانی زاویہ معلوم ہے اسواسطے بموجب صورت چہارم مثلثات غیر قایم الزاویہ کے زاویۂ ا س ی کا حساب لگا سکتے ہین اور اوسکو ا س ب مین سے تفریق کرکے زاویۂ ب س ی کو دریافت کرسکتے ہین اس سے معلوم ہوا کہ یہ امر بدیہات سے ہے کہ دو مثلثون ا د س اور ب د س کے تمام زاویون اور اضلاع ا س اور ب س کے معلوم ہونے سے ہمکو بموجب صورت اول مثلثات غیر قایم الزاویہ کے اضلاع ا د اور ب د اور س د یعنے ابعاد مطلوب دریافت ہوجائین

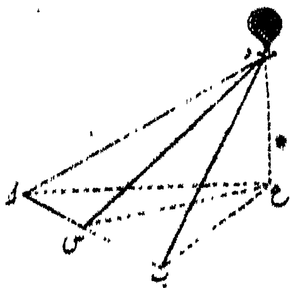
امثلۂ مشق ۲۹

(۱) فرض کرو کہ ابعاد ا ب اور ب س اور س ا ۴ میل اور ۳ میل اور ۵ میل ہین اور زاویئے ا د س اور ب د س ۲۱° اور ۲۲° ۱۰' ہین ابعاد د ا اور د س دریافت کرسکتے ہین

(۲) ایک مثلث متساوی الاضلاع ہے اوسکا ہر ایک ضلع ۸ گز ہے اور اوس مثلث کے اندر مین کہڑا ہوا اور اضلاع مین سے ایک ضلع کے محاذی زاویہ ۸۱° ۳۰' اور دوسرے ضلع کے محاذی ۴۰° ۱۴' ۲۰" ہے پایا تو میرا فاصلہ مثلث کے زاویونسے کتنا کتنا ہے ❊

دسوان سوال

سطح افقی کے اوپر ایک شے کی بلندی دریافت کرو اور اوسکا مشاہدہ تین مقامون سے کیا گیا ہے اور یہ تینون مقام ایک خط مستقیم مین ہین ❊



فرض کرو کہ ا اور س اور ب ارتفاعی زاویے نقطہ د کے ہین جو نقاط ا اور س اور ب سے مشاہدہ کئے گئے اور یہ تینون نقطے ایک خط مستقیم مین ہین فرض کرو کہ فاصلے ب س اور س ا اور ا ب طا اور طب اور طس ہین اور ارتفاع مطلوب ع د = صہ پس مثلث قائم الزاویہ ا ع د اور س ع د اور ب ع د ہین ❊

ا ع = صہ مم ا

س ع = صہ مم س

ب ع = صہ مم ب

اگر زاویہ ب س ع کو صہ سے تعبیر کرین تو

ا ع² = ا س² + س ع² + ۲ ا س × س ع جم صہ

ب ع² = ب س² + س ع² − ۲ ب س × س ع جم صہ

اگر ہم پہلی مساوات کو ب س مین ضرب دین اور دوسری کو ا س مین اور پہر اوسکو جمع کرین تاکہ زاویہ صہ دور ہو جائے تو ہمکو یہ ارتباط حاصل ہوگا ❊

ب س × ا ر ع۲ + ا س × ب ر ع۲ = ب س × ا س۲ + ا س × ب س۲

+ (ب س + ا س) س ر ع۲

خطوط کی جگہہ اون کی قیمتون کے مندرج کرنے سے یہ حاصل ہوتا ہے کہ

حہ۲ = طا طب طس / طا مم ا ـ طس مم۲ س + طب مم۲ ب

اس سے ارتفاع حہ دریافت ہوجائے گا

امثلہ مشق ۳۰

(۱) تین مشاہدہ کرنے والے ا اور س اور ب ایک ہی خط مستقیم مین کہڑے ہین اور فاصلے ا س = ۵۰۰ فیٹ اور ب س = ۱۳۰۰ فیٹ اور زاویئے ارتفاعی ایک بیلون کی ایک ہی وقت مین یون مشاہدہ کئے گئے کہ

ا = ۵° ۲۰′

س = ۵۸° ۱۴′

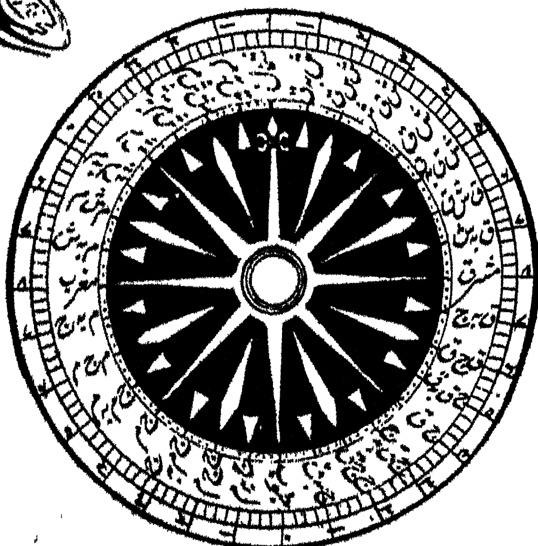
ب = ۴۹° ۲۵′

تو بتاؤ بیلون زمین سے کتنا دور ہے

(۲) ایک تکل کی بلندی دریافت کرنے کے لئے تین مقامون پر نشان کئے گئے اور اونمین ایک دوسرے سے فاصلہ ۱۵۰ فیٹ کا تہا اور وہ ایک خط مستقیم مین تہے مگر یہ خط تکل کی سمت مین نہ تہا مقام وسط سے اوسکا زاویۂ ارتفاعی ۵۳° ۸′ تہا اور اطراف کے مقام سے ارتفاع ۵۰° ۴۴′ اور ۴۸° ۲۱′ تہا تو اوسکا ارتفاع کیا ہوگا

ـ جہاز رانی اور سمندر کی پیمائشون مین نقاط کے مقام اور خطوط کی سمتین کمپاس کے نقاط سے بتلائے جاتے ہین اسلئے ہم کمپاس کی تصویر کاغذ پر بناسے دیتے ہین اوسکے دیکھنے سے صاف سمجھ مین آجائے گا کہ یہ اصطلاحات کیا ہین کہ شمال مشرق اور شمال شمال مشرق اور شمال بمشرق اور شمال مشرق بجنوب وغیرہ کیا





ربعہ دائرہ آٹھہ برابر حصّون مین تقسیم ہوتا ہے اور ہر ایک حصہ کو نقطہ کہتے ہین اور پھر ان نقطونکے دو دو اور چار چار اور آٹھہ آٹھہ حصے کرتے ہین یہ ظاہر ہے کہ

ایک نقطہ = ۱۱ ۱۵′ ۰″

نصف نقطہ = ۵ ۳۷′ ۳۰″

ربعہ نقطہ = ۲ ۴۸′ ۴۵″

کنپاس کے نقطونکو کبھی اسطرح بھی تعبیر کیا کرتے ہین کہ اتنے نقطے داہین یا باہین طرف شمال کے پس شمال مشرق بمشرق ۵ نقطے داہین طرف شمال کے کہلاتے ہین مغرب بشمال ۷ نقطے بائین طرف شمال کے اور علی ہذا القیاس اور جب نصف یا ربعہ نقطہ کا ذکر کیا جائے تو ۳½ نقطے داہین طرف شمال کے یعنے ۵¾ بائین طرف شمال کے بھی جاتے ہین اور اونکو تعبیر اسطرح کیا کرتے ہین شم مش ۲ شم ½ مش اور مش مغ ۲ مغ ¾ مغ اب یہ ظاہر ہے کہ یہ شم مش ½ شم اور مغ مش مغ ½ شم سے بھی تعبیر ہو سکتی ہین

لوگارثم جیب اور مماس اور قاطع الزاویہ ہر ایک نقطہ اور ربعہ نقطہ کمپاس کی

نقطہ	جیب	جیب التمام	مماس	مماس التمام	قاطع الزاویہ	قاطع التمام	نقطہ
۰	۰٫۰۰۰۰۰	۱۰٫۰۰۰۰۰	۰٫۰۰۰۰۰	لانہایت	۱۰٫۰۰۰۰	لانہایت	۸
¼	۸٫۶۹۰۸۰	۹٫۹۹۹۴۸	۸٫۶۹۱۳۲	۱۱٫۳۰۸۶۸	۱۰٫۰۰۰۵۲	٫۳۰۹۲۰	۷¾
½	۸٫۹۹۱۳۰	۹٫۹۹۷۹۰	۸٫۹۹۳۴۰	۱۱٫۰۰۶۶۰	۱۰٫۰۰۲۱۰	۱۱٫۰۰۸۷۰	۷½
¾	۹٫۱۶۶۵۲	۹٫۹۹۵۲۷	۹٫۱۷۱۲۵	۱۰٫۸۲۸۷۵	۱۰٫۰۰۴۷۳	۱۰٫۸۳۳۴۸	۷¼
۱	۹٫۲۹۰۲۳	۹٫۹۹۱۰۷	۹٫۲۹۸۶۶	۱۰٫۷۰۱۳۴	۱۰٫۰۰۸۴۳	۱۰٫۷۰۹۷۷	۷
۱¼	۹٫۳۸۵۰۷	۹٫۹۸۶۷۹	۹٫۳۹۸۷۸	۱۰٫۶۰۱۲۱	۱۰٫۰۱۳۲۱	۱۰٫۶۱۴۴۳	۶¾
۱½	۹٫۴۶۲۸۲	۹٫۹۸۰۸۸	۹٫۴۸۱۹۴	۱۰٫۵۱۸۰۶	۱۰٫۰۱۹۱۱	۱۰٫۵۳۷۱۸	۶½
۱¾	۹٫۵۲۷۴۹	۹٫۹۷۳۸۳	۹٫۵۵۳۶۵	۱۰٫۴۴۶۳۵	۱۰٫۰۲۶۱۷	۱۰٫۴۷۲۵۱	۶¼
۲	۹٫۵۸۲۸۳	۹٫۹۶۵۶۱	۹٫۶۱۷۲۲	۱۰٫۳۸۲۷۸	۱۰٫۰۳۴۳۸	۱۰٫۴۱۷۱۷	۶
۲¼	۹٫۶۳۰۹۹	۹٫۹۵۶۱۶	۹٫۶۷۴۸۳	۱۰٫۳۲۵۱۷	۱۰٫۰۴۳۸۴	۱۰٫۳۶۹۰۱	۵¾
۲½	۹٫۶۷۳۳۹	۹٫۹۴۵۴۲	۹٫۷۲۷۹۶	۱۰٫۲۷۲۰۴	۱۰٫۰۵۴۵۷	۱۰٫۳۲۶۶۱	۵½
۲¾	۹٫۷۱۱۰۵	۹٫۹۳۳۳۵	۹٫۷۷۷۷۰	۱۰٫۲۲۲۳۰	۱۰٫۰۶۶۶۵	۱۰٫۲۸۸۹۵	۵¼
۳	۹٫۷۴۴۷۴	۹٫۹۱۹۸۶	۹٫۸۲۴۸۹	۱۰٫۱۷۵۱۱	۱۰٫۰۸۰۱۵	۱۰٫۲۵۵۲۶	۵
۳¼	۹٫۷۷۵۰۳	۹٫۹۰۴۸۳	۹٫۸۷۰۲۰	۱۰٫۱۲۹۸۰	۱۰٫۰۹۵۱۷	۱۰٫۲۲۴۹۷	۴¾
۳½	۹٫۸۰۲۳۶	۹٫۸۸۸۱۸	۹٫۹۱۴۱۷	۱۰٫۰۸۵۸۳	۱۰٫۱۱۱۸۱	۱۰٫۱۹۷۶۴	۴½
۳¾	۹٫۸۲۷۰۸	۹٫۸۶۹۷۹	۹٫۹۵۷۲۹	۱۰٫۰۴۲۷۱	۱۰٫۱۳۰۳۱	۱۰٫۱۷۲۹۲	۴¼
۴	۹٫۸۴۹۴۸	۹٫۸۴۹۴۸	۱۰٫۰۰۰۰	۱۰٫۰۰۰۰۰	۱۰٫۱۵۰۵۱	۱۰٫۱۵۰۵۱	۴
	جیب التمام	جیب	مماس التمام	مماس	جیب التمام	قاطع الزاویہ	

امثلہ متفرقہ

(۱) زاویہ نظری ایک آدمی کے قد کا ۱۰° ہے اگر یہ قد ۶ فیٹ ہو تو بتاؤ اوسکا فاصلہ کیا ہوگا
(۲) می کرومیٹر سے دشمن کے توپ خانہ مین ایک توپ کے پہیہ کا محاذی زاویہ ۱۲' ناپا گیا اور یہ معلوم ہے کہ قطر پہیہ کا ۵ فیٹ ہے تو توپ کا فاصلہ دریافت کرو *
(۳) ایک پر اسوار ون کا آتا تہا می کرومیٹر سے دیکہا تو اوسکے ارتفاع عمود کے محاذی زاویہ ۴' تہا اگر گہوڑے کے سوار سمیت ارتفاع ۸ فیٹ فرض کیا جائے تو اوس پیرہ کا فاصلہ کیا ہوگا +
(۴) ایک پہاڑ پر علم لگا ہوا ہے اوسکا محاذی زاویہ سمندر مین جہاز کے اندر ۳' ۸" کا ناپا گیا ہے اور زاویہ ارتفاع پہاڑ کا ۴° ہے پہاڑ سے فاصلہ جہاز کا اور بلندی پہاڑ کی دریافت کرو اور علم ۲۴ فیٹ بلند تہا +
(۵) ایک پہاڑ کی چوٹی پر کہڑے ہو کر مین نے دیکہا کہ ۲۲۰ فیٹ بلند مینار کا زاویہ نظری ۱° ۱۲' ہے اور زاویہ پستی اوسکی چوٹی کا ۲° ۱۲' ہے تو بتاؤ بلندی پہاڑ کی اور ارتفاع پہاڑ کا
(۶) ایک شخص تکل اوڑا رہا تہا اوس نے دیکہا کہ اوسکا زاویہ ارتفاعی ۴۴° ۴۴' ۱۵" ہے اور ڈور کا طول ۲۴۸ گز تہا تو ارتفاع تکل کا دریافت کرو اور ڈور ایک خط مستقیم مین تنی ہوئی فرض کی گئی ہے *
(۷) مینار ایفل کا ۹۰۰ فیٹ بلند ہے دور سے اوسی سطح پر جسپر وہ قائم ہے اوسکی چوٹی کا زاویہ ارتفاع ۴۹° ۱۴' تہا اوسکا یہی فاصلہ دریافت کرو *
(۸) ایک آدمی کا قد ایسا ہے کہ اوسکی آنکہ ۵ فیٹ زمین سے اونچی ہے تو بتاؤ وہ ۴۰ فیٹ بلند مینار سے کتنا پرے ہٹے کہ زاویہ نظری مینار کا ۴۵° کا بنے +

افق سمندری کا فاصلہ میلون مین دریافت کرنا

فرض کرو کہ صہ فٹ ارتفاع آنکہ کا سمندر کے سطح سے اور آنکہہ سے سطح زمین کا جو مماس نکالا جاے وہ طا ہو اور نق نصف قطر زمین کا ہو

لق۲ + ط۲ = (لق + صہ)۲ = لق۲ + ۲ لق صہ + صہ۲

اگر صہ بمقابلہ لق کے نہایت خفیف ہو تو اوسکی مربع سی قطع نظر کرو اور اوسکو کالعدم سمجھو

ط۲ = ۲ لق صہ

تفاوت طا کا فاصلہ افقی سے جو سطح زمین سے ناپا جاے قابل لحاظ کی نہین ہوتا اگر ۲ نق کی جگہہ قطر زمین کے میل یعنے ۷۹۲۶ رکھین اور صہ کو ۵۲۸۰ پر میلون کی طرف تحویل کرنے کے لئے تقسیم کرین تو ہمکو یہ حاصل ہوگا +

(فاصلہ)۲ = ۱٫۵ صہ

پس سطح سمندر پر فاصلہ افقی کے دریافت کرنے کا یہ قاعدہ مستنبط ہوا

قاعدہ

ارتفاع چشم کے فٹ ن پر نصف فٹ زیادہ کرو اور حاصل جمع کا جذر دریافت کرو تو ماحصل فاصلہ میلون مین ہوگا

(۹) ارتفاع فلہ اشنا کا ۱۰۲۰۰ فیٹ سطح سمندر سے ہے تو بتاؤ فاصلہ افق سمندر کا کیا ہے

(۱۰) ایک جہاز پر ۱۲۰ توپین لگ سکتی ہین اور اوسکا مستول ۲۱۰ فیٹ پانی سے اونچا ہے بحری میلون مین بتاؤ کتنا فاصلہ افق سے دکہائی دیگا +

(۱۱) ایک جگہہ کرارا ۱۰۰ فیٹ اونچا ہے تو بتاؤ جہاز جب اوسپر سے دکہائی دے گا تو کنارہ سے کتنی دور جہاز ہوگا

یعنی افق کا دریافت کرنا

آنکھ سے مماس سطح زمین کا اور خط افقی کھینچین توجو زاویہ اون دو خطوںکے درمیان واقع ہوگا اوسے پستی افق کہتے ہین - اب یہ ظاہر ہے کہ یہ زاویہ برابر اوس زاویۂ مرکزی کے ہے جو محاذی ت ط کے مرکز پر واقع ہو یعنے فاصلۂ افق بحری کے

پستی افق دقیقون مین = ۱۰۶۱ ط

ہوا محیط زمین کے سبب سے روشنی کا انحراف ہوتا ہے اس سبب سے پستی افق پستی مذکور سے کم ہوتی ہے قاعدہ ذیل کے موافق ہمیشہ عملیات مین پستی افق دریافت کیا کرتے ہین

قاعدہ

ارتفاع کے فٹون کا جذر برابر پستی افق کے دقیقون کے ہوتا ہے

(۱۲) ایک مستول ۸۰ فیٹ اونچا ہے پستی افق دریافت کرو

(۱۳) افق بحری کے میلون کا حساب پستی افق سی کہ دقیقون مین بیان کیا گیا ہی کرو

(۱۴) چوٹی ٹنی رف کی ۱۲۱۷۰ فٹ ہے پستی افق دریافت کرو اور افق محسوس کا بعد چوٹی سی معلوم کرو

(۱۵) ایک مکان سامنے دریا کے پار واقع تھا اور اوسکا ارتفاع دریافت کرنا منظور تھا مین نے قاعدہ کا خط ۵۰ فیٹ کا مکان کے ایک طرف مین ناپا اور اس قاعدہ کے انجامون پر زاویئے ارتفاع مکان کے ۲۵° ۱۰′ اور ۳۶° ۱۴′ ناپے تو بتاؤ ارتفاع مکان کا کیا ہے اور قریب کے مقام سے فاصلہ اوسکا کیا ہے

(۱۶) اگر ا اور س اور ب تین نقطے ایک خط مین برابر فاصلہ پر واقع ہون اگر فاصلے اس اور س ب نقطۂ د کی محاذی زاویئے سہ اور صہ بناتین اور خط س د کا میلان اب کے ساتھ فر ہو تو زاویۂ فر کو سہ اور صہ کی رقمون مین بیان کرو

(۱۷) ایک حاطہ نصف دائرہ کی شکل کا ہے اور اوسکا قطر ۸۰ فیٹ ہے اوسکے محیط مین کھڑا ہو کر مین کیا دیکھتا ہون کہ دو دروازے جو احاطے کے اندر ہین زاویۂ نظری ۴۰° ۳۳′ کا بناتے ہین تو بتاؤ اونکے درمیان فاصلہ کیا ہے

سوالات متفرقہ

(۱۸) مین ایک عمارت کے سامنے کہڑا تہا اوسکے تین ستون جو ایک خط مستقیم مین ہین اور چالیس چالیس گز کے فاصلہ پر ایک دوسرے سے واقع ہین اونکے محاذی زاویے ۳۱° ۱۰′ اور ۴۲° ۱۲′ کے واقع ہین تو بتاؤ ہر ستون سے کس فاصلہ پر مین کہڑا تہا

(۱۹) پلائی موتہہ کا فاصلہ لزرڈ سے ۴۴۰۴۵ میل ہے اور لزرد سے سٹارٹ پوئنٹ تک ۱۵۱۰۷ میل کا فاصلہ ہے اور سٹارٹ پوئنٹ سے پلائی موتہہ تک فاصلہ ۱۳۰۲۳ میل کا ہے اور اڈی سٹون لائٹ سے پلائی موتہہ کا مقام

	شم ۲۵°	۴′	مش
لزرد	جنو ۷۰°	۱۳′	مغ
سٹارٹ	شم ۱۳°	۵۲′	مش

ایڈی سٹون لائٹ اور پلائی اور لزرد اور سٹارٹ پوئنٹ کا فاصلہ دریافت کرو

(۲۰) سینٹ الیان ہیڈ ۱۸ بحری میل کے فاصلہ نیڈلس سے واقع ہے اور اوسنے مغ ³⁄₄ شم نیڈلس سے جنو مغ بہ مغ کی سمت مین جہاز ۳ گہنٹہ تک چلا تو مجکو سینٹ الیان کا ہیڈ شمال کو معلوم ہوا تو بتاؤ مین کس فاصلہ پر ہیڈ سے ہون اور کس رفتار سے مین نیڈلس سے چلا تہا +

(۲۱) سٹارٹ پوئنٹ نیڈلس سے ۸۰ بحری میل کے فاصلہ پر ہے اور مغ ½ شم کی سمت مین ہے اور راس لاہیگ فرانسیسی کنارہ پر ۶۰ بحری میل کے فاصلہ پر نیڈلس سے واقع ہے اور جنو مغ ½ جنو کی سمت مین تو بتاؤ راس لاہیگ سے کس سمت مین جہاز چلے کہ سٹارٹ پوئنٹ پر پہونچے +

(۲۲) راستہ کا طول کیا ہوگا +

(۲۳) فلسک کی روشنی گہر کا انگلش چینل مین مقام دریافت کرنیکے واسطے ویکسن فورد کے کنارے سے تین مقام اضافی دریافت کیے تو وہ کورٹ ہستو کے مقام پر ۹۲° ۷′

منٹ شمال کا گرین ٹور کے مقام سے ۳۲ ۴۰ منٹ شمال کا اور راس لیر کے مقام پر ۱۱ ۴۰ منٹ شمال کا اور فاصلہ کارن سور اور راس لیر کے مقام مین ۱۰ اسمندری میل ہی اور گرینویر کے مقام کا فاصلہ باقی مقاموت سے ۵ ۱/۲ میل ہے ان معلومات سی ٹسکر کا فاصلہ تین مقامون سے دریافت کرو

(۲۴) دو لڑکے تکل اڑا رہے تہے اونکے دلمین آیا کہ یہہ کسطرح معلوم کرین کہ تکل کتنے اوپر زمین سے ہے اونمین سے ایک لڑکے کے پاس اصطرلاب ربعی تہا اوس سے اوس نے زاویہ تقام ۲۲ ۵ ۱۱ دریافت کیا اور جب وہ آگے ۴۰۰ فیٹ خط مستقیم مین تکل کے ساتہہ بڑہا اور زاویہ ارتفاع ناپا تو ۴۸ ۲۲ تہا دوسرے کے پاس جدولون کی کتاب تہی اوسنے ان معلومات سے بلندی کا حساب لگایا تو بتاؤ بلندی تکل کی کیا نکلی ہوگی ؟

(۲۵) شہاب ثاقب کا راستہ لندن اور ووسسٹر اور ڈبلن سے دیکہا گیا اور یہ تینون مقام ایک خط مستقیم مین ہین اور انمین فاصلہ ۹۶ اور ۱۸۰ میل ہے جسوقت وہ ٹوٹا تہا اوسکا ارتفاع لندن مین شمال کیطرف ۹ ۴ ۳۰ تہا اور ووسسٹر مین ۵ ۴ ۲۰ اور ڈبلن مین ۳۰ ۴۴ تو بتاؤ وہ زمین سے کتنا بلند تہا

(۲۶) ایک جہاز کا مستول ۸۶ فیٹ بلند پانی سے تہا اور ایک اور جہاز کی پتوار کا پستی زاویہ افق محسوس سے ۴ ۴۲ تہا تو بتاؤ جہاز کا فاصلہ کیا تہا اور پستی افق کو محسوب نہ کرو ؟

(۲۷) پستی افق کو محسوب کرکے حساب کرو

(۲۸) کشتی ۸ و ۵ میل ایک بندرگاہ سے ہے اور مقام اوسکا ج ۴ م ہے بندرگاہ مین پہونچنے کے واسطے جنوبی ہوا کے سبب سے اوسکو دو رخ لینے پڑے اول ق شرق اور دوسرا ج م ب ج تو بتاؤ اون سمتون مین ہر سمت مین وہ کسقدر میل چلی اور کل کیا وقت صرف ہوا اور رفتار چلنے کی ۴ ناٹ تہی

سوالات متفرقہ

(۲۹) لنگر نما کا مقام دریافت کرنا تہا کنارہ پر دو مقام ا اور ب مقرر کیے اور انکے فاصلہ ڈیڑہ میل کا رکہا ا پر جو زاویہ لنگر نما ب کے ساتہہ بناتا ہے ۴۵° ۲۳' ہے اور ب پر جو زاویہ اسکے ساتہہ وہ بناتا ہے ۳۹° ۱۵' ہے تو بتاؤ ا اور ب سے لنگر نما کا فاصلہ گزون مین کتنا ہے

(۳۰) ایک ہوائی اور دوسرا دخانی جہاز ایک ہی بندرگاہ سے ساتہہ چلے دخانی جہاز ج ہ م ½ م کی سمت مین ۱۰½ نوٹ کی رفتار سے چلا اور ہوائی جہاز ج ق ہ ق کی سمت مین ۶ نوٹ فی گہنٹہ کی رفتار سے چلا تو بتاؤ ۲½ گہنٹہ عرصہ مین اونکے اندر کسقدر فاصلہ ہوگا اور مقام اضافی ہوائی جہاز کا بلحاظ دخانی جہاز کی کیا ہوگا؛

(۳۱) دو پہاڑ ہین ایک ۳ میل اونچا دوسرا دو میل بلند تو بتاؤ سطح زمین پر کسقدر فاصلہ اونکے درمیان واقع ہو کہ چوٹی ایک پہاڑ کی دوسرے پہاڑ کی چوٹی پر سے دکہائی دے

(۳۲) ایک قلعہ سمندر مین ایک پہاڑ پر واقع ہے اوسکا ارتفاع ۸۵ فیٹ ہے اور اس قلعہ کی چوٹی اور جڑ سے ایک جہاز کی مستول کے زوایائے پستی ۵° ۴۷' اور ۵° ۸' دکہائی دی تو بتاؤ جہاز کا فاصلہ کے گز تہا

(۳۳) ایک دریا کا عرض معلوم نہ تہا اوسکے دریافت کرنے کے واسطے کنارہ پر قاعدہ ۵۰۴ فیٹ کا پیمائش کیا اور اوسکے اطراف کے نام ا اور ب رکہے طرف ا پر مین نے پرزمک کمپاس سے دیکہا کہ زاویہ اضافی ب اور ایک درخت جو مقابل کے کنارہ پر واقع ہے ۴۴° ۴۰' اور ۴۰° ۴۳' ق بہ ش اور طرف ب پر ا اور درخت کے زاویے علی الترتیب ۵۷° ۵۶' اور ۴۸° ۲۸' م بہ ش تو بتاؤ عرض دریا کا کیا ہے

(۳۴) مین ایک بلون پر سوار تہا اور بیرومیٹر سے اوسکا ارتفاع ۷۰۰ فیٹ بہی دریافت ہوا اور مین نے سکسٹنٹ سے سینٹ پال کے گرجا کا سمندری افق سے جو پستی کا زاویہ دریافت کیا وہ ۱۰° ۴۳' تہا اگر بلون ٹہیک عمود مین گرے تو بتاؤ وہ سینٹ پال سے کسقدر

سوالات متفرقہ

(۳۵) دو پہاڑ ا اور ب ہین اونکے درمیان فاصلہ دریافت کرو مین نے ہر ایک پہاڑ سے دو چیزین س اور د کنارہ پر مشاہدہ کین اون چیزونکے مابین کا فاصلہ ۲ ۱/۴ میل کا اور کنیاس کے ہر ایک مقامات اضافی یہ تھے

ا سے س کا ۱۵° ۳۰َ ق من ش اور ب سے د کا ۲۲° ۰۰َ ق من ش
" د کا ۲۲° ۰۰َ ق من ش " س کا ۱۱° ۳۰َ م من ش
" ب کا ۳۲° ۱۴َ ج من ق " ا کا ۷° ۵° ۳۰َ م بہ ش

(۳۶) ایک بند صحی اور دو مقام ا اور ب ہین اور اونمین ۱۲۵۰ گز فاصلہ ہے اور ا ٹہیک جنوب کو بند کے ایک انجام سے اور ب اسیقدر فاصلہ پر دوسرے انجام سے مشرق کو واقع ہے اب اس بند کی حد کے محاذی مقام ا یا ب پر زاویہ ۱۵° کا بنتا ہے تو بتاؤ بند کے دونو سرونکے درمیان فاصلہ خط مستقیم مین کتنا ہے

(۳۷) کورک کے بندرگاہ کو چہوڑا تو راس قدیم کن سیل کا سمت ش ش م ۳/۴ م دکہائی دیا ۸ نوٹ کی رفتار سے جہاز سوا گہنٹہ سمت ب ج چلا تو پہر راس ش ش ق ب ۱/۴ ق کی سمت مین دکہائی دیا تو بتاؤ جہاز کا فاصلہ راس سے کتنا ہے *

(۳۸) آپ نلسے ڈور مین مشرق کو جہاز جاتا تہا اور جب مین نے ڈدور اور کیلاس کی لین مین تو دیکہا س ج ق ۱/۲ ق مین دکہائی دیا جب سمت مذکور مین ۱۰ ۱/۲ میل چلا تو کیلاس سمت ج م ب م مین دکہائی دینے لگا تو بتاؤ ڈدور کا مقام اضافی کتنا ہے اور وہ کتنی دور ہے اور ڈدور اور کیلاس مین ۲۵ میل کا فاصلہ ہے

(۳۹) ایک مکان کی چہت ۴۰ فیٹ اونچی ہے مین نے ۱۸۰ فیٹ بلند برج کو دیکہا تو اوسکے محاذی زاویئے ۲۰° کا بنا تو بتاؤ افق پر فاصلہ برج کا کیا ہے *

(۴۰) ایک جنگی جہاز سے ۸ میل کے فاصلہ پر ایک بندرگاہ کا دہانہ ق ش ق کی سمت میں واقع تہا جنگی جہاز نے دیکہا کہ بندرگاہ سے سوداگرون کا ق ش ق کی سمت مین ۷ نوٹ فی

گھنٹہ کی رفتار سے چلا تو بتاؤ کس سمت مین جنگی جہاز چلے کہ ۲ ½ گھنٹہ مین سوداگری جہاز کو پکڑلے اور کیا رفتار رکہے اور کتنے فاصلہ پر پکڑے گا

(۴۱) ایک متوازی الاضلاع کا قطر ۷۵ فیٹ ہے اور اوسکی کسی ایک طرف سے جو خطوط مستقیم مقابل کے اضلاع کے نقطۂ وسط مین ملائے جائین اونسے وہ زاویے ۲۰° ۱۴′ اور ۲۵° ۳۸′ بناتا ہے تو اضلاع کا طول اور دوسرے قطر کا طول دریافت کرو ؛

(۴۲) فرض کرو کہ ایک پہاڑ کی چوٹی آ ہے اور اوسکی جڑ ب ہے اور پہاڑ کا حصہ پائین ایک سطح مستوی ۵۰۰۸۴ گز لمبا: افق پر ۱۲° ۱۰′ مائل ہے اور پہاڑ کی چوٹی کا زاویۂ ارتفاع مقام ب سے ۳۳° ۲۰′ ہے اور س پر ۲۵° ۱۲′ تو آ کا ارتفاع سطح افق سے فٹون مین دریافت کرو اور یہ سطح افق ب پر سے کہیچے جائین ؛

(۴۳) دو چہڑیان برابر ارتفاع کی ہین اونکی جڑون کی سیدہ مین نزدیک کی چہڑی کا زاویہ ارتفاع ۶۰° کا مشاہدہ کیا اور اس سیدہ سے وہ ایک سمت مین جو پہلی سیدہ سے زاویۂ قائمہ بناتے تہے ۸۰ فیٹ چلا تو زاویۂ ارتفاعی دونو چہڑیون کے ۴۵° و ۳۰° دکہائی دیئے تو اونکا ارتفاع اور فاصلۂ درمیانی بتاؤ ؛

(۴۴) دوپہر کو ایک مستول کا سایہ دیکہنے سے ق ب ج ق کی سمت مین پڑتا تہا اور اوسکا ایک سرا ش ب ق مین تہا اور زاویۂ ارتفاع ستون ۵۴° تہا اور طول سایہ کا ۸۰ فیٹ ستون کا ارتفاع دریافت کرو

(۴۵) ایک جہاز مین سے روشنی کہ سمت ش ش ق مین دکہائی دیا اور ق ب ج مین ۷ میل چلے تو روشنی گہر ش م ب ش مین دکہائی دیا تو روشنی کا فاصلہ جہاز کے اول اور آخر مقام سے جہاز کے دریافت کرو

(۴۶) ایک مثلث متساوی الساقین کا زاویۂ راس ۲۰° کا ہے اور قاعدہ کے بالمقابل ہ اور ب سے خطوط مقابل کے اضلاع تک کہیچے گئے ہین اور م اور ن پر ملتے ہین اور زاویے ۵۰° اور ۶۰° فٹ کے قاعدہ کے ساتہ بناتے ہین تو خط ن م کا میلان

جواب

جوابات مثالوں کے

جواب امثلہ (۱)

(۱) ۰،۱۷۱۳۲   (۲) ۱۷۱،۱۹۸ فیٹ   (۳) ۱۲۱۱ فٹ

جواب امثلہ ۲

(۱) ۱،۳۷۱۹   (۲) ۰،۳۱۳۱۶   (۳) ۳۲° ۵۸′ ۱۸،۵۵″

(۴) ۱۴° ۴۰′ ۳۴۸،۳″   (۵) ۵۷° ۱۷′ ۵۴″   (۶) ۰،۷۸۵۳۹

(۷) ۵° ۹′ ۲۳،۸۵″   (۸) ۵۹۳۹،۹۵۲ فیٹ   (۹) ۱° ۱۴′ ۳۹،۶″

(۱۰) ۲۱۵۰،۹۸ میل   (۱۱) ۹ کروڑ ۵۰ لاکھ ۵۰ ہزار کے قریب

جواب امثلہ ۳

(۱) ۰،۹۰۷   (۲) ۰،۸۱۹   (۳) ،۸۳۲   (۴) ۱،۳۹۶

(۵) ۰،۶۲۰   (۶) ،۵۱۴   (۷) ۰،۳۹۳   (۸) ۱،۰۳۰

(۹) ۰،۹۹۸   (۱۰) ۱،۰۱۹   (۱۱) ۰،۵۱۵   (۱۲) ۰،۶۶۱

جواب امثلہ ۴

(۱) طس = ۵۰۳،۹۱   (۲) طس = ۳۷۷،۳۸۶   (۳) طس = ۲۸۰،۵۸

ا = ۸°   ا = ۴۲°   ا = ۲۷°

ب = ۸۲°   ب = ۴۸°   ب = ۶۳°

جواب امثلہ ۵

(۱) طب = ۱۴،۰۹۵   (۲) طب = ۲۱۳،۲۹   (۳) طب = ۱۰۲،۸۶

ا = ۴۰°   ا = ۳۱°   ا = ۵۳°

ب = ۵۰°   ب = ۵۹°   ب = ۳۶°

جواب امثلہ ۶

جواب

(۱) ب = ۷۶° (۲) ا = ۳۰° (۳) ا = ۳۳°

طب = ۴۰۵٫۲۰۶ طب = ۵۳۵٫۶ طب = ۳٫۳۳۳۷

طس = ۴۴۰٫۲۰ طس = ۶۳۰ طس = ۳۸۵۵٫۷۶

جواب امثلہ ۷

(۱) ب = ۵۵° (۲) ا = ۴۶° (۳) ب = ۶۱°

طا = ۱۳۷٫۶۶ طا = ۴۱۳٫۶۲ طا = ۳٫۳۹۳۷

طب = ۱۹۶٫۶۹ طب = ۳۹۹٫۴۳ طب = ۶٫۱۲۲۳

جواب امثلہ ۸

(۱) ا = ۳۶° ۵۲′ ۱۱″ (۲) ا = ۶۸° ۲۱′ ۱۱″ (۳) ا = ۶° ۱۴′ ۵۰″

ب = ۵۳° ۷′ ۴۹″ ب = ۳۱° ۳۸′ ۴۹″ ب = ۸۳° ۴۵′ ۱۰″

طس = ۵ طس = ۱۸۹۳٫۵۴ گز طس = ۱۳۲۷٫۹ فٹ

(۴) ا = ۳۳° ۷′ ۱۳″ (۵) ا = ۶۰° ۲۳′ ۴۴″

ب = ۲۶° ۵۲′ ۴۷″ ب = ۲۹° ۳۶′ ۱۶″

طس = ۱۹۶۱٫۹ طس = ۲۰۲۴٫۲۵

جواب امثلہ ۹

(۱) ا = ۲۰° ۳۳′ ۳۶″ (۲) ا = ۱۹° ۵۲′ ۴۶″ (۳) ا = ۱۰۵° ۳۴′ ۳۵″

ب = ۵۹° ۲۶′ ۲۴″ ب = ۲۰° ۴۴′ ۱۴″ ب = ۳۸° ۲۰′ ۲۵″

طب = ۹۷٫۵۷

(۴) ا = ۳۰° ۵۲′ ۱۸″ (۵) ا = ۴۳° ۳۳′ ۲″

ب = ۴۹° ۱۶′ ۵۲″ ب = ۴۶° ۴۶′ ۵۸″

طس = ۴۹٫۷۸۶

جواب امثلہ ۱۰

(۱) ب = ۵۴° ۵۸′ (۲) ا = ۳۱° ۵۶′ ۳۳″ (۳) ا = ۵۴°

طب = ۱۸٫۵۴۳ طب = ۱۸۵۵٫۷ طب = ۵۹۹٫۳۹

طس = ۲۲٫۶۴۶ طس = ۲۱۸۶٫۸ طس = ۱۰۱۹٫۷

(۴) ب = ۵۸° ۳۸′ ۴۵″ (۵) ل = ۹۰°

طا = ۴۶۶۶٫۸۵ طا = ۹۹۷٫۱

طب = ۷۶۶٫۳۸ طب = ۱۷۵٫۹

امثلہ مشق ۱۲

(۱) ۷۴۰٫۸۹۶۱۵۵ مربع فیٹ (۲) ۳۵۳۳٫۲۵۰۳۳۶ مربع فیٹ (۳) ۰٫۳۴۷۵۲۳ مربع میل

امثلہ مشق ۱۳

(۱) ۵۶۰۰٫۹ (۲) ۴۵۹۷۰ (۳) ۱٫۳۳۵ (۴) ۴۷۲۵ (۵) ۴۰۳۳۵

امثلہ مشق ۱۴

(۱) ۷۷٫۲۷۱ (۲) ۶۹۹٫۹۶ (۳) ۶۹۲٫۳۸۷

امثلہ مشق ۱۵

(۱) ۱۴۳۵۸ (۲) ۱٫۷۱۰ (۳) ۱۲۰۹۰۸۳ (۴) ۰٫۰۳۸۴ (۵) ۱۰۰۷۶۹

امثلہ مشق ۱۶

(۱) ل = ۶۵° ۳۴′ (۲) ل = ۲۶° ۴۳′ ۱۰″ (۳) ل = ۱۰° ۱۸′ ۳۱″

طب = ۱۱٫۴۶۱ طب = ۳۷۵۰٫۶ طب = ۲۶۶۵

طس = ۱۵٫۵۰۱ طس = ۳۸۸۸ طس = ۲۳۷۵

(۴) ل = ۲۲° ۵۳′ ۳۵″ (۵) ل = ۱۲۱° ۶′ ۲۵″

طب = ۲۲۲۱٫۸ طب = ۶۸٫۱۶

طس = ۱۵۴۳۱ طس = ۴۳٫۰۱۷

امثلہ مشق ۱۷

(۱) ب = ۴۲° ۲۲′ ۴۹″ (۲) ب = ۶۹° ۸′ ۱۴″ (۳) ب = ۱۰۳° ۵۳′ ۳۴″

س = ۱۰۰° ۵۳′ ۱۴″ س = ۲۵° ۳۹′ ۱۹″ س = ۱۲ ۴۳′ ۶″

طس = ۷۷٫۲۰۹ طس = ۲۷۱٫۷۱ طس = ۴۹٫۱۳۷

(۴) ب = ۲۷° ۵۹′ ۳۴″ (۵) ب = ۹۰

س = ۴۴° ۵۷′ ۴۰″ س = ۱۵° ۱۴′

طس = ۴۶٫۳۵۷ طس = ۷۸٫۴۶

جواب امثلہ ۱۸

(۱) ا = ۵۹° ۳۷′ ۱۹″ (۲) ا = ۳۴° ۸′ ۳۵″ (۳) ا = ۱۳۷° ۵۴′ ۳۰″

ب = ۲۱° ۲۸′ ۱۴″ ب = ۱۹° ۱۵′ ۱۰″ ب = ۲۵° ۳۷′ ۱۷″

طس = ۵۹۰٫۹۲ طس = ۷۶٫۱۴ طس = ۳۰۱٫۶

(۴) ا = ۹۱° ۵′ ۵۸″ (۵) ا = ۱۱۹° ۳۴′ ۵۸″

ب = ۲۷° ۱′ ۲۰″ ب = ۳۸° ۱۱′ ۳۲″

طس = ۷۲۴۶ طس = ۷۵٫۷۴

جواب امثلہ ۱۹

(۱) ا = ۴۵° ۹′ ۱۷″ (۲) ا = ۱۱۸° ۵۵′ ۵۲″ (۳) ا = ۴۷° ۴۵′ ۴۰″

ب = ۶۲° ۱۱′ ۵۵″ ب = ۱۴° ۳۲′ ۱۳″ ب = ۵۹° ۴۰′ ۴۳″

س = ۸۴° ۳۸′ ۵۳″ س = ۱۹° ۳۱′ ۳۶″ س = ۵۴° ۳۳′ ۳۴″

(۴) ا = ۸۴° ۴۶′ ۲۴″ (۵) ا = ۴۹° ۱۴′ ۵۵″

ب = ۹۶° ۵۳′ ۱۶″ ب = ۱۱۶° ۰۷′ ۲۹″

س = ۳۴° ۲۰′ ۱۷″ س = ۱۴° ۳۷′ ۳۵″

جواب امثلہ ۲۰

(۱) ۱۶۸٫۸ فٹ (۲) ۵۴٫۱۲ فیٹ

جواب امثلہ ۲۱

(۱) ۲۲۰٫۴۵ (۲) ۸۴۸٫۶ فیٹ

جواب امثلہ ۲۲

(۱) ارتفاع = ۶۰۶۲ (۲) ارتفاع کہڑکی = ۹ ۶۳ ر ۲۴ فٹ

سمندر پر ارتفاع = ۲۳ ر ۵۴۴ فٹ ارتفاع زمین پر = ۱۹۶ ر ۴۹ فٹ

جواب امثلہ ۲۳

(۱) ارتفاع = ۱ر۹۹ ۲ فیٹ (۲) فاصلہ = ۲ ر ۷۰ ۵ گز

ارتفاع مکان = ۸۰ ر ۸۰ فیٹ

جواب امثلہ ۲۴

(۱) ۶ ر ۷۵ ۲ گز (۲) ۴۸۰ قدم

جواب امثلہ ۲۵

(۱) ۳ ر ۸۸ ۳ گز (۲) ۶۹ ۱۲ گز

جواب امثلہ ۲۶

(۱) ۲ میل ۹۵۸ گز (۲) ۸ ۶ ۶ گز

جواب امثلہ ۲۷

(۱) ۸ ر ۶۶۹ گز (۲) ۹ ر ۶۰۶۱ گز

جواب امثلہ ۲۸

(۱) ۳ ۹ ۳ ر ۱۱ میل (۲) فاصلہ = ۳۰۳۴ گز

روشنی گہر اس ۱۰۶ ۳۴ اور ب ۳ ۳ ۷ ۴ روشنی گہرسے
ٹیکلہ سے کب ۱۰۹ ۳۰ اور ۱ ۱۳ ۹ ۱

جواب امثلہ ۲۹

(۱) د ا = ۵۶ ر ۲۴ (۲) ۸۶ ۳ ۴ گز
د ب = ۱۲ ۴ ر ۵ ۱۱ ر ۴۲
د س = ۱۵ ۲ ر ۷ ۲۳ ر ۲۱

جواب امثلہ ۳۰

(۱) ۶ ر ۱۷۴۲ افیٹ (۲) ۷ ر ۳۴۶

جواب سوالات متفرقہ

(۱) ۲۰۶۲۳٫۶۵ فیٹ (۲) ۱۴۳۲ فیٹ (۳) ۱٫۳ میل

(۴) فاصلہ = ۲۰۳۸ فیٹ (۵) فاصلہ = ۹۹۷۷ فیٹ

ارتفاع = ۵۰۸ فیٹ ارتفاع = ۲۴۰۱ فیٹ

(۶) ۴۱۸٫۷ فیٹ (۷) ۱۹۹۲٫۴ فیٹ (۸) ۶۴٫۲۸ فیٹ (۹) ۱۲۶ میل

(۱۰) ۱۵٫۳۲ میل (۱۱) ۳۰ میل (۱۲) ۸٫۹

(۱۳) میلون مین فاصلہ = ۱٫۱۵ × پستی افق کے دقیقون مین

(۱۴) پستی افق = ۱° ۵۷′ فاصلہ ۱۳۵ میل

(۱۵) ارتفاع ۶۵٫۴۷ فیٹ فاصلہ ۱۹٫۳۵ فیٹ

(۱۶) ہم شنر = جب (سہ − صہا) / (جب سہ − جب صہ) (۱۷) ۴۵٫۵۰۴ فیٹ

(۱۸) مینار وسط سے فاصلہ = ۵۳۱٫۴ فیٹ

آخر پہاڑ سے فاصلہ = ۵۷٫۴۱ فیٹ اور ۷۴٫۵۲ فیٹ

(۱۹) ۱۳٫۱۰ میل ۴۳٫۴۲ میل اور ۲۷٫۲۲ میل

(۲۰) فاصلہ = ۱۴٫۵ میل رفتار = ۷ نوٹ

(۲۱) شمال مغرب ۳/۴ شم (۲۲) ۶۸٫۳ میل

(۲۳) کورن سور پونٹ سے ۱۶٫۷ میل گری نوز سے ۴۱٫۷۳ میل روس لرپوئنٹ سے ۹٫۶۴ میل

(۲۴) ۲۵۷٫۱۶ فیٹ (۲۵) ۱۸۲٫۹ میل ارتفاع ایڈن براین

(۲۶) ۳۳۰٫۹ فیٹ (۲۷) ۳۲۷٫۴ فیٹ

(۲۸) اول رستہ ۴٫۹۳ میل دوسرا رستہ ۶٫۸۴ میل وقت = ۱ گھنٹہ ۴۱ منٹ

(۲۹) اسے = ۱۶۷۴ گز بسے = ۲۱۵۵ گز

جواب

(۳۰) فاصلہ ۲۵٫۴۷ میل مقام شم مش ½ مش (۳۱) ۲۰ ۲ میل

(۳۲) ۱۶۸۸٫۷ گز (۳۳) ۲۲۰ فیٹ (۳۴) ۶٫۰۱۳ میل

(۳۵) ۳٫۷۶ میل (۳۶) ۳۵۵ گز (۳۷) ۱۳٫۹۸۹ میل

(۳۸) مقام صحیح ۳۴۹° ۲۹َ مغ شم کا فاصلہ ۲۷٫۸ میل (۳۹) ۲۶۸٫۶ فیٹ

(۴۰) رستہ مش بہ جنو ½ جنو رفتار = ۹ نوٹ فاصلہ = ۲۲٫۹ میل

(۴۱) ۷۰٫۲۳ فیٹ ۵۲٫۱۲ فیٹ اور ۹٫۳۳۴ فیٹ

(۴۲) ۲۹۸۱٫۶ فیٹ (۴۳) ارتفاع ۹۷٫۹۱ فیٹ فاصلہ ۲۰۶٫۱۲۵

(۴۴) ۱۱٫۲۳ فیٹ (۴۵) ۵٫۹۳۵ میل ۲۰۷٫۸ میل (۴۶) ۳۰°

جدولیں جیبوں اور مماسوں کی

	جیب	مماس	
۰°	۰٫۰۰۰۰۰	۰٫۰۰۰۰۰	۹۰°
۱°	۰٫۰۱۷۴۵	۰٫۰۱۷۴۵	۸۹°
۲°	۰٫۰۳۴۹۰	۰٫۰۳۴۹۲	۸۸°
۳°	۰٫۰۵۲۳۳	۰٫۰۵۲۴۱	۸۷°
۴°	۰٫۰۶۹۷۵	۰٫۰۶۹۹۲	۸۶°
۵°	۰٫۰۸۷۱۵	۰٫۰۸۷۴۹	۸۵°
۶°	۰٫۱۰۴۵۳	۰٫۱۰۵۱۰	۸۴°
۷°	۰٫۱۲۱۸۷	۰٫۱۲۲۷۸	۸۳°
۸°	۰٫۱۳۹۱۷	۰٫۱۴۰۵۴	۸۲°
۹°	۰٫۱۵۶۴۳	۰٫۱۵۸۳۸	۸۱°
۱۰°	۰٫۱۷۳۶۵	۰٫۱۷۶۳۲	۸۰°
۱۱°	۰٫۱۹۰۸۱	۰٫۱۹۴۳۸	۷۹°
۱۲°	۰٫۲۰۷۹۱	۰٫۲۱۲۵۵	۷۸°
۱۳°	۰٫۲۲۴۹۵	۰٫۲۳۰۸۷	۷۷°
۱۴°	۰٫۲۴۱۹۲	۰٫۲۴۹۳۳	۷۶°
۱۵°	۰٫۲۵۸۸۲	۰٫۲۶۷۹۵	۷۵°
۱۶°	۰٫۲۷۵۶۳	۰٫۲۸۶۷۴	۷۴°
۱۷°	۰٫۲۹۲۳۷	۰٫۳۰۵۷۳	۷۳°
۱۸°	۰٫۳۰۹۰۱	۰٫۳۲۴۹۲	۷۲°
۱۹°	۰٫۳۲۵۵۶	۰٫۳۴۴۳۲	۷۱°
۲۰°	۰٫۳۴۲۰۲	۰٫۳۶۳۹۷	۷۰°
۲۱°	۰٫۳۵۸۳۷	۰٫۳۸۳۸۶	۶۹°
۲۲°	۰٫۳۷۴۶۰	۰٫۴۰۴۰۳	۶۸°
۲۳°	۰٫۳۹۰۷۳	۰٫۴۲۴۴۷	۶۷°
۲۴°	۰٫۴۰۶۷۳	۰٫۴۴۵۲۳	۶۶°
۲۵°	۰٫۴۲۲۶۲	۰٫۴۶۶۳۱	۶۵°
	جیب التمام	مماس التمام	

	جیب	مماس	
٢٥°	٠،٤٢٢٦٢	٠،٤٦٦٣١	٦٥°
٢٦°	٠،٤٣٨٣٧	٠،٤٨٧٧٣	٦٤°
٢٧°	٠،٤٥٣٩٩	٠،٥٠٩٥٢	٦٣°
٢٨°	٠،٤٦٩٤٧	٠،٥٣١٧١	٦٢°
٢٩°	٠،٤٨٤٨١	٠،٥٥٤٣١	٦١°
٣٠°	٠،٥٠٠٠٠	٠،٥٧٧٣٥	٦٠°
٣١°	٠،٥١٥٠٣	٠،٦٠٠٨٦	٥٩°
٣٢°	٠،٥٢٩٩٢	٠،٦٢٤٨٧	٥٨°
٣٣°	٠،٥٤٤٦٤	٠،٦٤٩٤١	٥٧°
٣٤°	٠،٥٥٩١٩	٠،٦٧٤٥١	٥٦°
٣٥°	٠،٥٧٣٥٧	٠،٧٠٠٢١	٥٥°
٣٦°	،٥٨٧٧٨	٠،٧٢٦٥٣	٥٤°
٣٧°	،٦٠١٨١	٠،٧٥٣٣٥	٥٣°
٣٨°	،٦١٥٦٦	٠،٧٨١٢٨	٥٢°
٣٩°	،٦٢٩٣٢	٠،٨٠٩٧٨	٥١°
٤٠°	،٦٤٢٧٩	٠،٨٣٩١٠	٥٠°
٤١°	٠،٦٥٦٠٦	٠،٨٦٩٣٨	٤٩°
٤٢°	٠،٦٦٩١٣	٠،٩٠٠٤٠	٤٨°
٤٣°	٠،٦٨٢٠٠	٠،٩٣٢٥١	٤٧°
٤٤°	٠،٦٩٤٦٦	٠،٩٦٥٦٩	٤٦°
٤٥°	٠،٧٠٧١٠	١،٠٠٠٠٠	٤٥°
٤٦°	٠،٧١٩٣٤	١،٠٣٥٥٣	٤٤°
٤٧°	٠،٧٣١٣٥	١،٠٧٢٣٧	٤٣°
٤٨°	٠،٧٤٣١٤	١،١١٠٦١	٤٢°
٤٩°	٠،٧٥٤٧١	١،١٥٠٥٧	٤١°
٥٠°	٠،٧٦٦٠٤	١،١٩١٧٥	٤٠°
	جیب التمام	مماس التمام	

جدولین جیبون اور مماسونکی

	مماس		جیب	
۴۰	۱٫۱۹۱۷۵		۰٫۷۶۶۰۴	۵۰
۳۹	۱٫۲۳۴۸۹		۰٫۷۷۷۱۴	۵۱
۳۸	۱٫۲۷۹۹۴		۰٫۷۸۸۰۱	۵۲
۳۷	۱٫۳۲۷۰۴		۰٫۷۹۸۶۳	۵۳
۳۶	۱٫۳۷۶۳۸		۰٫۸۰۹۰۱	۵۴
۳۵	۱٫۴۲۸۱۵		۰٫۸۱۹۱۵	۵۵
۳۴	۱٫۴۸۲۵۶		۰٫۸۲۹۰۴	۵۶
۳۳	۱٫۵۳۹۸۶		۰٫۸۳۸۶۷	۵۷
۳۲	۱٫۶۰۰۳۳		۰٫۸۴۸۰۵	۵۸
۳۱	۱٫۶۶۴۲۸		۰٫۸۵۷۱۶	۵۹
۳۰	۱٫۷۳۲۰۵		۰٫۸۶۶۰۲	۶۰
۲۹	۱٫۸۰۴۰۵		۰٫۸۷۴۶۲	۶۱
۲۸	۱٫۸۸۰۷۲		۰٫۸۸۲۹۵	۶۲
۲۷	۱٫۹۶۲۶۱		۰٫۸۹۱۰۰	۶۳
۲۶	۲٫۰۵۰۳۰		۰٫۸۹۸۷۹	۶۴
۲۵	۲٫۱۴۴۵۰		۰٫۹۰۶۳۱	۶۵
۲۴	۲٫۲۴۶۰۳		۰٫۹۱۳۰۵	۶۶
۲۳	۲٫۳۵۵۸۵		۰٫۹۲۰۵۰	۶۷
۲۲	۲٫۴۷۵۰۸		۰٫۹۲۷۱۸	۶۸
۲۱	۲٫۶۰۵۰۹		۰٫۹۳۳۵۸	۶۹
۲۰	۲٫۷۴۷۴۸		۰٫۹۳۹۶۰	۷۰
۱۹	۲٫۹۰۴۲۱		۰٫۹۴۵۵۲	۷۱
۱۸	۳٫۰۷۷۶۸		۰٫۹۵۱۰۵	۷۲
۱۷	۳٫۲۷۰۸۵		۰٫۹۵۶۳۰	۷۳
۱۶	۳٫۴۸۷۴۱		۰٫۹۶۱۲۶	۷۴
۱۵	۳٫۷۳۲۰۵		۰٫۹۶۵۹۲	۷۵
	مماس التمام		جیب التمام	

جدول جیبوں اور مماسوں کی

	جیب	مماس	
٧٥	٫٩٦٥٩٣	٣٫٧٣٢٠٥	١٥
٧٦	٠٫٩٧٠٢٩	٤٫٠١٠٧٨	١٤
٧٧	٠٫٩٧٣٣٧	٤٫٣٣١٣٧	١٣
٧٨	٠٫٩٧٨١٥	٤٫٧٠٤٦٣	١٢
٧٩	٠٫٩٨١٦٢	٥٫١٤٤٥٥	١١
٨٠	٠٫٩٨٤٨١	٥٫٦٧١٢٨	١٠
٨١	٠٫٩٨٧٦٩	٦٫٣١٣٧٥	٩
٨٢	٠٫٩٩٠٢٧	٧٫١١٥٣٧	٨
٨٣	٠٫٩٩٢٥٤	٨٫١٤٤٣٤	٧
٨٤	٠٫٩٩٤٥٢	٩٫٥١٤٣٦	٦
٨٥	٠٫٩٩٦١٩	١١٫٤٣٠٠٥	٥
٨٦	٫٩٩٧٥٦	١٤٫٣٠٠٦٦	٤
٨٧	٫٩٩٨٦٣	١٩٫٠٨١١٣	٣
٨٨	٫٩٩٩٣٩	٢٨٫٦٣٦٢٥	٢
٨٩	٫٩٩٩٨٥	٥٧٫٢٨٩٩٦	١
٩٠	١٫٠٠٠٠٠	لا انتہا	٠
	جیب التمام	مماس التمام	

ہذا الکتاب از ملک سید محمد قادری بتاریخ بست و ہشتم ربیع الثانی ۱۲۹۵ خریدہ شد



بقلم محمد محمود حسن بتاریخ ۲۳ ماہ ستمبر ۱۸۷۱ع باختتام رسید